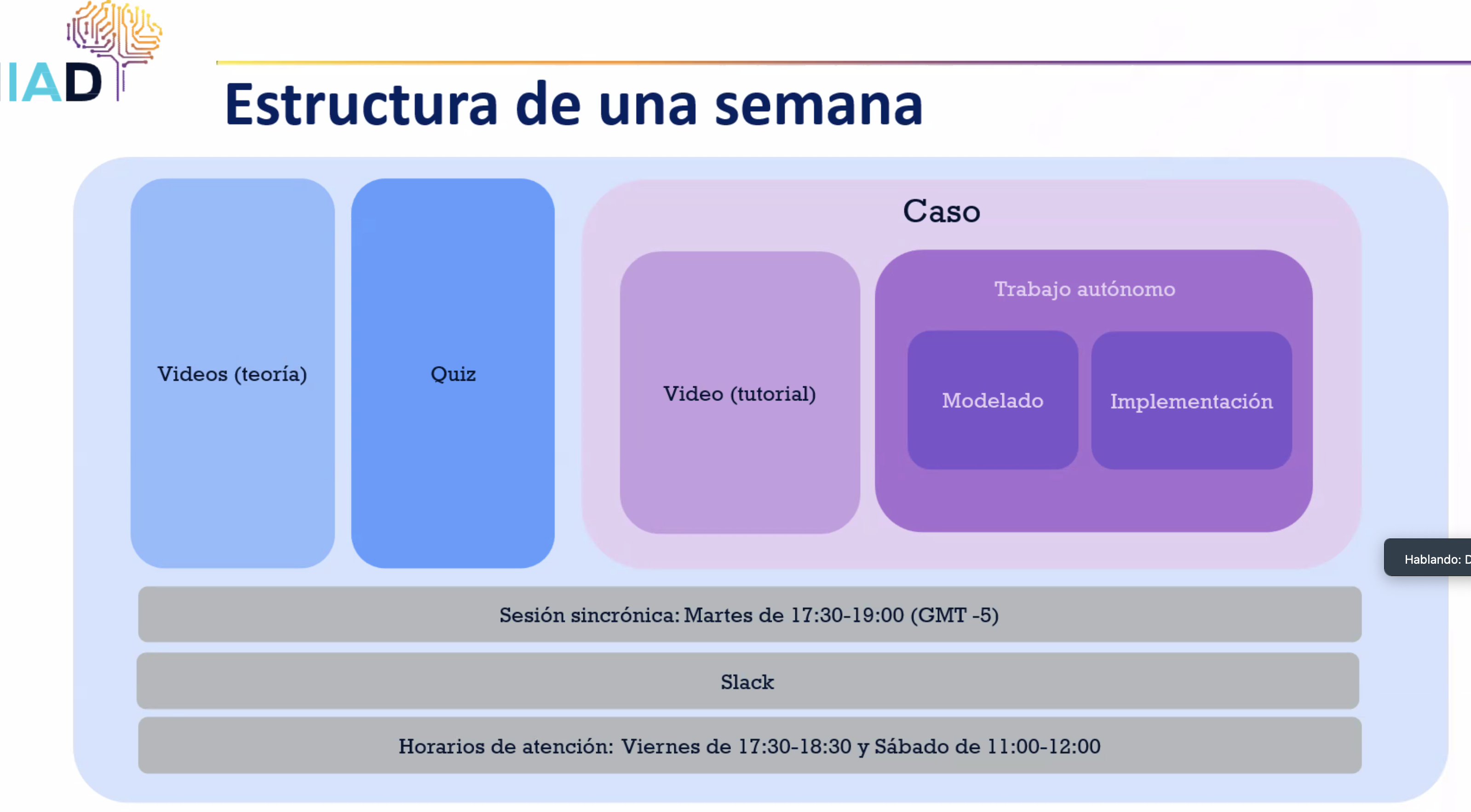
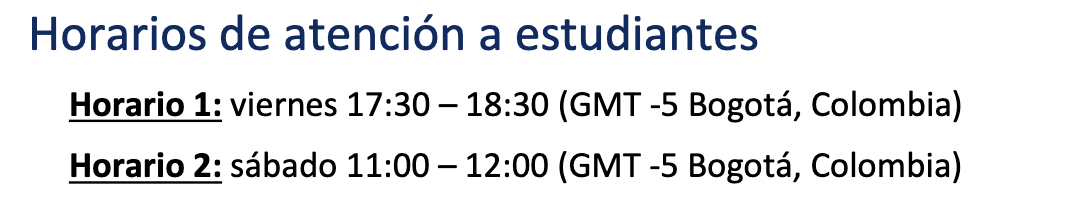
**Optimización para la Toma de Decisiones**

****

****

****

**SEMANA 1**

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/E1F1q/introduccion-al-curso>

Hola. Bienvenidos al curso

de optimización para la toma de decisiones de la Maestría

en Inteligencia Analítica de Datos.

Soy Andrés Medaglia y seré el profesor que los acompañará en este proceso de aprendizaje.

Este curso te ayudará a resolver situaciones

problemáticas haciendo uso de modelos prescriptivos de analítica.

Con estos modelos podrás prescribir una serie de acciones que te

ayudarán a llevar un sistema o proceso a un estado mejorado o deseado.

Articularás los tres pilares de la analítica: los problemas de negocio,

los modelos matemáticos y los datos y la programación.

En el curso aprenderás a: identificar situaciones susceptibles de

ser mejoradas a través de modelos de optimización en un contexto real;

estructurar los componentes de un modelo de optimización;

formular matemáticamente un modelo de optimización;

implementar y resolver un modelo de optimización

utilizando herramientas computacionales de forma programática;

y, finalmente, aprenderás a analizar,

interpretar y comunicar los resultados de un modelo de optimización.

A través de un ejemplo,

quiero que te lleves la idea de lo que es posible hacer con los modelos de optimización.

Imagínate que tienes una cantidad bastante grande de piezas de dominó.

Ahora deseas hacer una representación artística de esta foto con esas piezas.

Es necesario ponerlas de tal forma que los puntos de

las piezas de dominó reflejen lo más fielmente la foto.

La pregunta es, ¿cómo debemos poner cada pieza sobre la foto?

Afortunadamente, los modelos de optimización son

particularmente buenos para prescribir este tipo de acciones.

Después de explorar literalmente millones de alternativas,

nos pueden ayudar a poner cada pieza en el mejor lugar.

Haciendo uso de 189 juegos de dominó,

este sería el resultado.

Si nos acercamos a la cabeza del ciclista,

vemos cómo el modelo de optimización dispuso cada una de las piezas.

El poder de la optimización es precisamente ese.

Nos ayuda a escoger dentro de muchas opciones posibles la mejor.

Imagínate el impacto inmenso que puede tener en tu organización y la sociedad.

Personalmente, estoy convencido que a través de la optimización podemos

armar muchos rompecabezas que nos ayudarán a construir un mundo mejor.

Las oportunidades son infinitas y no se reducen al ámbito de los negocios.

Ahora hablemos un poco de la metodología que llevaremos en el curso.

El eje de este curso son las prácticas computacionales.

Te retaremos a través de un caso cada semana,

y a través de la práctica computacional aprenderás

varios conceptos de modelamiento y de solución de modelos de optimización.

Las prácticas están diseñadas para que aprendas vivencialmente lo que es hacer una

iteración completa del ciclo de construcción de un modelo

de optimización orientado a la toma de decisiones.

Iniciarás con la estructuración y continuarás con el modelamiento matemático,

la implementación computacional, el análisis de la solución y su visualización.

Al contar con prácticas computacionales semanales,

este curso no tiene un proyecto final.

Cada semana contarás con recursos que ayudarán a tu aprendizaje.

Tendrás disponible: prácticas computacionales en cuadernos de Jupyter,

cuestionarios, videos de los temas,

videos tutoriales, lecturas complementarias,

encuentros sincrónicos donde reforzaremos los aprendizajes en

forma grupal y canales de preguntas y discusión.

Al lado mío estarán los tutores que los apoyarán en el curso.

La evaluación del curso se centrará en

las prácticas computacionales y los cuestionarios,

que serán valorados de forma individual.

Solo me resta darles de nuevo la bienvenida al curso.

Estoy seguro que se

divertirán aprendiendo y harán conexiones con su práctica profesional y su vida personal.

Mi objetivo es despertar en ustedes la misma pasión que tengo por este tema.

Bienvenidos a la fiesta de la optimización.

Relación de la optimización con la analítica de datos

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/gH4TW/relacion-de-la-optimizacion-con-la-analitica-de-datos>

Hola, bienvenidos a este video sobre la relación de la optimización con la

analítica de datos.

Tradicionalmente, la investigación de operaciones se ha enfocado desde sus

inicios en la solución de problemas en las organizaciones.

Partiendo de una realidad problemática, se define un modelo matemático que es una

abstracción del sistema susceptible de mejora.

Una vez el sistema es modelado, a través de propiedades matemáticas y métodos

computacionales, se encuentra la mejor configuración del sistema.

Luego, ese resultado se transfiere a la realidad procurando impactar la toma de

decisiones.

Esta idea de toma de decisiones basadas en modelos es el origen de lo que

hoy se conoce como analítica de datos.

De allí su estrecha conexión con la investigación de operaciones.

La analítica, en breve,

es el proceso de transformar datos en información valiosa para tomar decisiones.

Mi sesgo es que esa transformación requiere de modelos que pueden ser

descriptivos, predictivos y prescriptivos.

Los modelos descriptivos muestran los datos de forma sintetizada y responden

a lo que you pasó.

Son claves para comprender lo que ocurrió en el pasado o entender el estado actual.

Algunos ejemplos de estos modelos son análisis de correlaciones,

distribuciones de frecuencias y análisis estadístico descriptivo.

Los modelos predictivos se enfocan en mirar hacia adelante.

Y, basados en los datos históricos y sus relaciones,

son capaces de anticipar lo que podría pasar.

Son muy utilizados para medir el impacto que tendría en el sistema cambios en

algunas variables.

Algunos de estos modelos de naturaleza estadística son la regresión lineal y

las series de tiempo.

Y otros, de naturaleza basada en datos, son las redes neuronales.

Finalmente, los modelos prescriptivos se enfocan en definir acciones para que pase

algo deseado.

Estos últimos son en los que nos centraremos en este curso,

en particular nos enfocaremos en modelos de optimización lineal.

Aunque cada uno de estos tipos de modelos tiene un propósito específico,

para resolver problemas complejos es usualmente necesario integrar múltiples

modelos para dar respuestas efectivas.

Para ilustrar cómo se integran y relacionan estos modelos de analítica,

utilizaré dos casos de aplicación.

El primer ejemplo tienen que ver con el programa de Recreovía del

Instituto Distrital de Recreación y Deporte de Bogotá en Colombia.

Primero, un poco de contexto sobre el programa de Recrovía.

Este programa de Recreovía en Bogotá consiste en ofrecer clases de actividad

física en parques, especialmente a comunidades vulnerables.

Este programa está presente en por lo menos nueve países en América Latina,

cuenta con más de 350 programas en al menos 6.500 sitios.

El reto de analítica surge ante la posibilidad de fortalecer el programa.

La pregunta es, ¿cómo expandir el programa en la ciudad haciendo el mejor

uso de recursos limitados?

Para dar respuesta a esta pregunta, desarrollamos un sistema de apoyo a la

decisión integrado con un sistema de información greográfica.

Con los expertos del IDRD recogimos información de las ubicaciones,

las áreas, registros de robos, horarios y participantes.

Con el sistema, es posible visualizar esta información a través de modelos de

estadística descriptiva que consolidan la información.

También construimos un modelo de análisis envolvente de datos para clasificar los

programas de acuerdo a su eficiencia.

Luego, construimos un modelo predictivo basado en random forest,

o bosque aleatorio,

para estimar el número de participantes en los sitios de Recreovía potenciales.

Como no hay registros históricos de los sitios que no están activos,

es necesario estimar cuánta población atraerán.

Finalmente, una serie de modelos de optimización que tienen en cuenta los

participantes potenciales, la eficiencia, los robos, las ubicaciones y los horarios,

permiten seleccionar los mejores sitios para expandir el programa.

El módulo de optimización selecciona entre todos los sitios dónde ubicar los

nuevos programas de acuerdo con el presupuesto disponible.

Y logrando una distribución equitativa en toda la ciudad.

Estos modelos se integraron en el sistema que desarrollamos para el IDRD,

que se llamó Recreo Boc.

A través del sistema, es posible crear diferentes escenarios cambiando

varios parámetros y explorar varias métricas para compararlos.

Es posible visualizar los puntos de Recreovía actuales y aquellos que el

modelo prescriptivo de optimización recomienda ubicar.

Un segundo ejemplo que muestra la integración y relación entre modelos de

analítica surge de una metodología para la clasificación de vías.

Que tiene en cuenta el nivel de estrés que experimentan los ciclistas en la

ciudad de Bogotá.

Para proporcionar un poco de contexto, Bogotá tiene la red de ciclovías más

grande de América Latina, con más de 500 kilómetros de vías dedicadas.

Además, como alternativa al transporte público para evitar contagios durante

la pandemia, la ciudad agregó 80 km más a la red con ciclovías temporales.

Dado que los ciclistas combinan esta infraestructura dedicada con las vías

compartidas con los autos para completar sus viajes,

es importante que la ciudad evalúe el nivel de estrés que experimenta

un ciclista en función de variables físicas y funcionales de la red vial.

Al final, a la ciudad le gustaría saber cómo invertir o adecuar la infraestructura

para tener una red con menor estrés para los ciclistas.

Y así poder fomentar el uso de un transporte más activo y sostenible.

Ahora bien, ¿qué es el nivel de estrés?

Es un indicador que clasifica las vías según el nivel de estrés experimentado

por un ciclista.

Es común utilizar el acrónimo del inglés LTS.

Para ilustrarlo, si los autos pasan rápidamente al lado de los ciclistas,

es posible que se sientan amenazados y en peligro.

Esa vía usualmente se clasificaría como LTS4.

Por lo contrario, si los ciclistas circulan por un carril amplio,

segregado del tráfico, es posible que se sientan mucho más cómodos y seguros.

Estas vías se clasificarían posiblemente como LTS1.

Así, los objetivos específicos de este proyecto de analítica son.

En primer lugar, diseñar una metodología para clasificar la malla vial según el

nivel de estrés que impone a un ciclista.

En segundo lugar,

incluir no solo información física de la malla vial como el ancho de la vía,

sino también información funcional como el tráfico y la congestión.

En tercer lugar, estimar el nivel de estrés para toda la ciudad de Bogotá.

Finalmente, previsar las inversiones en infraestructura vial para generar

una mayor cantidad de viajes de transporte activo con menor estrés.

Para dar respuesta a estas preguntas, desarrollamos un sistema de apoyo a la

decisión integrado con sistemas de información geográfica.

Con expertos en transporte, planificadores urbanos y expertos en salud pública,

decidimos usar variables que afectaban el nivel de estrés en los ciclistas.

Dividimos las variables en físicas y funcionales.

Entre las variables físicas, contamos con el ancho de la vía,

número de carriles, presencia de cicloinfraestructura y tráfico pesado.

Entre las variables funcionales, contamos con velocidad, densidad,

congestión y tráfico en las vías.

Haciendo uso de estadísticas descriptivas y geoespaciales, exploramos

los datos históricos para entender cómo se distribuían estas variables en la ciudad.

Una vez calculadas y descritas las variables,

utilizamos el análisis de conglomerados o clustering para identificar las vías

que eran similares entre sí.

Así pudimos clasificar un conjunto de vías en los cuatro niveles de estrés, LTS1,

2, 3 y 4.

Como la ciudad tiene más de 170.000 segmentos viales,

el análisis de conglomerados puede tardar mucho tiempo en ejecutarse.

Adicionalmente, nuevas vías están por construirse y necesitamos una forma de

clasificarlas.

Por esta razón, con el resultado del análisis de conglomerados,

entrenamos un modelo de regresión logística multinomial para escalar el

algoritmo de clasificación y expandirlo a nivel ciudad.

Este modelo predictivo tiene la capacidad de clasificar una nueva vía de acuerdo

a su nivel de estrés,

basado en los valores de las variables físicas y funcionales.

Finalmente, a través de modelos prescriptivos de optimización,

la ciudad puede determinar dónde invertir en nuevas vías y de qué tipo hacerlas.

En el modelo de optimización, se pueden incorporar restricciones presupuestales,

la conectividad de la red,

y considerar los deseos de viaje de la población de ciclistas.

Este modelo de optimización explorará un número inmenso de posibilidades para

encontrar el mejor diseño de la red.

Para concluir, en este video vimos cómo la analítica transforma datos en

información valiosa para tomar decisiones.

La analítica se soporta en modelos descriptimos, predictivos y prescriptivos.

La optimización hace parte de los modelos prescriptivos de analitica.

Y se alimenta de los resultados de modelos descriptivos y predictivos.

Finalmente, como vimos en los casos,

muchas veces es necesario integrar varios modelos de analítica, aprovechando las

fortalezas de cada uno de ellos para poder resolver problemas complejos.

[MUSIC]

Caso ejemplo e identificación de componentes

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/YTrLW/caso-ejemplo-e-identificacion-de-componentes>

Hola, bienvenidos a este video sobre los componentes de un modelo de optimización.

El proceso de formulación y solución de un modelo de optimzación sigue varios pasos.

El primer paso es la identificación de la situación problemática susceptible de ser

mejorada.

Acá es necesario definir el sistema, trazar límites,

identificar actores, identificar posibles fuentes de información,

y definir el alcance del proyecto.

El segundo paso se centra en el arte de formular un modelo.

En este paso,

identificamos los cuatro componentes básicos de un modelo de optimización.

En el tercer paso, recolectamos pogramáticamente las fuentes de datos,

extraemos y transformamos, y cargamos los datos.

En el cuarto paso, traducimos el modelo formulado en el paso dos haciendo uso de

un lenguaje especializado o librería de optimización.

En este paso, se resuelve el modelo y se encuentra su solución.

En los pasos cinco y seis, verificamos la solución y la validamos.

Al contrastar la solución con la realidad,

es frecuente encontrar que alguna condición fue omitida o a veces es

necesario corregir algo para afinar el modelo.

Iterativamente, debemos ir a la mesa de diseño y volver a trabajar con

los dueños del problema, para ir ajustando el modelo con ellos.

Finalmente, cuando hemos validado la solución,

podemos entrar a una fase de visualización de las salidas,

para que puedan ser entendidas y adoptadas por los decisores.

[MUSIC]

Ahora, nos centraremos en el paso de formulación,

donde se identificarán los componentes necesarios para representar un

problema real mediante un modelo de optimización.

Aunque la formulación tiene mucho de arte,

hay unos elementos que podemos identificar.

Y que nos facilitan el proceso de construcción de un modelo.

En lenguaje coloquial, hablaríamos de decisiones,

información, condiciones, y propósito.

Pero más formalmente, en el mundo de la optimización, estos elementos se conocen

como variables de decisión, parámetros, restricciones, y función objetivo.

Para empezar, las decisiones se deben traducir en variables de decisión.

Las variables de decisión son las respuestas que esperamos del modelo.

Es lo que no sabemos y esperamos que el proceso de optimización nos ayude

a decidir.

Algunos ejemplos son, un nivel de producción en la fabricación de lotes de

cerveza medidos en hectolitros por mes.

Invertir o no en una determinada acción financiera,

ubicar un punto de venta en un sitio de la ciudad, a cuántas personas contratar.

Cambios en la tasa de producción con respecto al mes anterior,

que podrían ser positivos, negativos o nulos.

El segundo componente tiene que ver con la información,

la cual denominamos los parámetros del modelo.

Aunque siendo más precisos, la información la agrupamos en dos categorías,

conjuntos y parámetros.

A diferencia de las variables,

estos son datos o elementos conocidos que necesitamos para formular nuestro modelo.

Por ejemplo,

en cuanto a conjuntos se podría pensar en períodos de tiempo como los trimestres.

Sitios potenciales para ubicar un centro de distribución,

las acciones en las que podemos invertir.

En cuanto a los parámetros,

algunos ejemplos son el costo de producir una determinada pieza,

el rendimiento histórico de cada acción, la demanda que debo satisfacer cada mes.

El tercer componente tiene que ver con las condiciones.

Estas condiciones son las reglas de negocio del problema.

Las restricciones limitan el valor que pueden tomar las variables de decisión,

emergen del diálogo con los dueños del problema y de la validación

de las soluciones del modelo.

Es importante recordar que todo lo que queramos que el modelo de optimización

considere se lo tenemos que expresar explicitamente.

Ejemplo de restricciones son, determinar un plan de producción que cumpla con

contratos mensuales preestablecidos.

No exceder la oferta de producción diaria, cumplir con los límites presupuestales.

Diversificar el riesgo a través de la inversión en varios sectores económicos.

Condiciones lógicas como, si se habré un centro de distribución,

entonces puedo asignar clientes a él.

Finalmente, el propósito del problema real se convierte en la función objetiva del

modelo.

En el proceso de optimización,

necesitamos decidir el propósito que le queremos dar a nuestro modelo.

En otras palabras, necesitamos darle elementos al modelo para que pueda

decidir, de un universo de alternativas, cómo una es mejor que otra.

Para esto, es necesario definir la función objetivo.

Algunos ejemplos de funciones objetivos son, minimizar el costo anual de

producción, maximizar el ingreso en el horizonte de planeación.

Balancear la carga de trabajo de todo los empleados,

maximizar el cubrimiento de una red de telecomunicaciones.

[MUSIC]

Ahora veamos un par de ejemplos con casos reales.

En un sistema de transporte de buses, es necesario ofrecer un conjunto de rutas

a los usuarios para que la sociedad pueda minimizar su tiempo de desplazamiento.

Las agencias de transporte de las ciudades conocen los deseos de viaje de los

usuarios a través de matrices origen-destino,

que son calibradas periódicamente.

Esas agencias también conocen la capacidad del sistema, medido por la capacidad de

las estaciones, la capacidad de carriles exclusivos y la cantidad de buses.

¿Cuáles serían los componentes de un modelo de optimización en este contexto?

[MUSIC]

En cuanto a las variables de decisión,

podríamos tener los flujos de personas dentro del sistema.

Decidir si una ruta para o no para en una determinada estación.

¿Cuántos buses deben ser asignados a una ruta?

¿Cuál debe ser la frecuencia de buses por hora para cada ruta?

En cuanto a información, los conjuntos estarían dados por las estaciones,

corredores o troncales y tipos de buses.

En cuanto a los parámetros, podríamos tener la matriz de deseos de viaje que

indica cuántas personas se quieren mover de una estación a otra por hora.

La capacidad de cada estación, la capacidad de cada tipo de bus,

la capacidad de un corredor vial.

En este contexto,

debemos indicarle al modelo que satisfaga los deseos de viaje de toda la ciudad.

No exceda la capacidad de las estaciones ni de los corredores,

entre otras condiciones.

En cuanto a la función objetivo, debemos decirle al modelo que diseñe las rutas de

tal forma que minimice el tiempo que gastan las personas transportándose.

Si incluimos una perspectiva de los operadores de los buses,

es posible que a ellos les interese minimizar el costo total de operación.

Como segundo ejemplo,

ubiquémonos en el contexto de una cadena de suministro de azúcar.

En este problema, tenemos una red de distribución compuesta por proveedores,

plantas, centros de distribución, y clientes.

Los proveedores envían suministros a las plantas.

Estas procesan el azúcar y la envían en diferentes presentaciones

a los centros de distribución.

Finalmente, esos centros envían el azúcar a los clientes.

Acá vemos cómo se presentan todas las posibilidades a través de los arcos que

conectan a los diferentes eslabones de la cadena.

Las alternativas son inmensas.

Pero una red optimizada luce así.

Esa solución prescribe unas soluciones específicas.

Por ejemplo, de un proveedor ubicado en Texas,

se debe enviar una gran cantidad de suministros a la planta cercana.

Y desde esa planta en Texas se debe abastecer el centro y oeste del país.

En ese contexto, las variables de decisión son,

¿cuánto enviar de cada proveedor a cada planta?

¿Cuánto enviar de cada planta a cada centro de distribución?

¿Cuánto enviar de cada centro a cada cliente?

¿Cuánto inventario mantener en cada centro?

En cuanto a los datos, algunos de los conjuntos serían, los proveedores,

las plantas, los centros de distribución.

Los clientes, los meses del horizonte de planeación, los modos de transporte.

En cuanto a parámetros estaría los costos de distribución por diferentes modos,

las capacidades de plantas.

Las demandas de los clientes y los costos de inventario.

En cuanto a restricciones podrían estar satisfacer la demanda de cada cliente,

no exceder las capacidades de las plantas de procesamiento.

No exceder los límites de inventario en los centros de distribución,

no exceder el presupuesto de operación global, entre muchas otras condiciones.

Finalmente, en cuanto a la función objetivo,

en este caso particular lo que se desea es minimizar el costo total de distribución.

[MUSIC]

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

El proceso de construcción de un modelo de optimización sigue varios pasos de forma

iterativa.

Los pasos en la construcción de un modelo son, estructuración del problema,

formulación matemática, extracción, cargue y transformación de información.

Solución computacional, análisis de resultados, validación,

comunicación y visualización de resultados.

Para formular matemáticamente un modelo de optimización,

es necesario identificar los siguientes cuatro componentes.

Variables de decisión, parámetros y conjuntos,

restricciones, y función objectivo.

Aunque el proceso de formular tiene mucho de arte y es

difícil tener una receta que funcione siempre.

Al identificar esos cuatro componentes, obtendremos un excelente punto de partida

para la concepción de un buen modelo de optimización.

Aunque todo modelo es una aproximación de la realidad, si lo construimos bien,

seguramente nos ayudará a tomar buenas decisiones.

[MUSIC]

# Presentación del caso y modelamiento

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/Ikw06/presentacion-del-caso-y-modelamiento>

Hola, en este video se presentará el problema de mezcla para aplicar el

modelado en optimización.

En este caso,

trabajaremos la optimización de la mezcla en canales de mercadeo digital.

Para entrar en contexto, revisemos el caso.

Una empresa ha visto que su participación en el mercado ha caído en

los últimos meses.

Por lo que han tomado la decisión de implementar una nueva estrategia

de mercadeo a través del uso de canales digitales.

Para promocionar sus productos y aumentar sus ventas

[MUSIC]

Se ha decidido empezar con YouTube y Facebook, you que según el departamento de

analítica son los canales que más frecuentan sus clientes.

Según el público objetivo, se han estimado que por cada 100 clics en una publicación

promocionada en Facebook, el incremento en ventas de $2.500.

Por cada 1.000 visualizaciones de anuncios en YouTube,

el incremento en venta es de $800.

El número máximo de clics que se permite adquirir en Facebook son 7.200 clics,

debido a la segmentación realizada.

Asimismo, solo se pueden adquirir hasta 50.000 visualizaciones en anuncios de

YouTube.

A la compañía, cada clic en Facebook cuesta $1,

100 visualizaciones de anuncios en YouTube le cuestan $20.

Y la empresa cuenta con un presupuesto de inversión en estos canales de $15.000.

Por último, la empresa ha establecido que por lo menos el 40% de la

inversión debe hacerse en Facebook.

Entonces, gracias a nuestra experticia en consultoría en analítica,

podemos ayudar a la empresa a responder.

¿Cuánto deberían invertir mensualmente en cada uno de los canales para obtener el

mayor incremento en ventas?

Veamos.

[MUSIC]

Para resolver nuestro problema, primero debemos identificar los componentes,

decisiones, parámetros, restricciones y función objetivo.

¿Cuáles serían las decisiones que la empresa debería tomar?

[MUSIC]

Las decisiones que la empresa debe tomar están relacionadas con la cantidad de

dinero a invertir en cada uno de los canales.

Específicamente en YouTube y Facebook.

Pero, ¿con qué información cuenta la empresa?

[MUSIC]

Tenemos información sobre el incremento en ventas y el costo por cierta cantidad de

clics o visualizaciones.

Sin embargo, lo que necesitamos tener es el incremento en

ventas por dólar invertido en cada uno de los canales.

[MUSIC]

Por lo tanto, debemos realizar las conversiones correspondientes.

Así podemos obtener un parámetro que nos indica cuánto incremento se espera en

ventas dado un monto de inversión en cada canal.

Por ejemplo, si 1.000 visualizaciones en anuncios de YouTube

aumentan las ventas en $800 y 100 visualizaciones cuestan $20.

Entonces, realmente hay un incremento en ventas de $4 por

dólar invertido en este canal.

[MUSIC]

En resumen,

se espera que las ventas incrementen en $25 por cada dólar invertido en Facebook.

Y que incrementen $4 por cada dólar invertido en anuncios de YouTube.

[MUSIC]

De la misma forma, tenemos información sobre el máximo número de clics y

visualizaciones que podemos invertir en cada canal.

De nuevo, podemos realizar conversiones para dejarlos expresados en dólares.

[MUSIC]

Así, por ejemplo, 50.000 visualizaciones en anuncios de YouTube

se pueden relacionar con el costo de $20 para 100 visualizaciones.

Y se obtiene un tope en la inversión de $10.000.

[MUSIC]

Los topes de inversión son,

entonces $7..200 para Facebook y $10.000 para YouTube.

[MUSIC]

En resumen, tenemos un parámetro que nos indica cuánto incremento se espera en

ventas dado un monto de inversión en cada canal.

De acuerdo al mercado potencial que podemos alcanzar en estos canales,

tenemos un tope de inversión en cada canal.

Finalmente, tenemos un presupuesto que la empresa ha destinado para invertir en los

canales de esta campaña de mercadeo.

Ahora bien, ¿qué aspectos limitarían las decisiones?

[MUSIC]

Asociada a la información encontramos un tope máximo de inversión en anuncios de

YouTube y de Facebook.

Se debe respetar el presupuesto máximo,

por lo menos el 40% de la inversión debe hacerse en Facebook.

Y, aunque no lo dicen explícitamente,

debemos garantizar que la inversión no sea negativa.

Ahora bien, ¿cómo mediríamos el impacto de las decisiones?

[MUSIC]

Pues, deberíamos maximizar el incremento en ventas.

Con todos los componentes definidos,

podemos pasar a realizar el modelado de este problema, veamos.

[MUSIC]

Para representar matemáticamente la decisión de la inversión y los canales,

tenemos Facebook y tenemos a YouTube.

Esto significaría que debemos escoger dos letras o símbolos para representar

estas decisiones.

En este caso vamos a elegir la letra x con el índice f para

denotar Facebook y la letra x con el índice y para denotar YouTube.

[MUSIC]

Para las restricciones,

empezamos por modelar la inversión máxima en cada uno de los canales.

Para ello, necesitaremos la información de la inversión máxima en Facebook y la

inversión máxima en YouTube.

Siendo así, podemos utilizar nuestra variable de inversión en YouTube, x sub y,

y agregarle el límite superior.

Es decir, usar el símbolo menor o igual que, y agregar el límite de $10.000.

m Asimismo podemos hacerlo con nuestra inversión máxima en Facebook.

x sub f, y agregarle el límite superior de 7.200.

[MUSIC]

Para la restricción del presupuesto solo debemos saber cuánto nos gastamos

en total.

Esto corresponde a la suma entre la cantidad a invertir en anuncios YouTube,

x sub y, más la cantidad a invertir en anuncios en Facebook, x sub f.

Que debe ser menor o igual a los $15.000 que tenemos de presupuesto total.

[MUSIC]

Si queremos garantizar la restricción del porcentaje de inversión mínima

en Facebook.

Entonces debemos pensar que, por un lado, debemos obtener el 40% de la inversión.

Esto lo logramos al multiplicar la suma de la inversión en YouTube y Facebook,

es decir, x sub y más x sub f, por 0.4.

O el 40 dividido entre 100.

La desigualdad tendría que ser entonces de menor o igual que.

Y del otro lado tendríamos la variable que representa la

cantidad a invertir en Facebook, es decir, la variable x sub f.

[MUSIC]

Luego tenemos las restricciones para garantizar que la inversión no sea

negativa.

Para lo cual decimos que cada una de las variables x sub y,

y x sub f deben ser mayores o iguales a 0.

[MUSIC]

Por último, para modelar la función objetivo debemos tener presente que

queremos maximizar el incremento en ventas.

El cual es de $25 por cada dólar invertido

en Facebook y $4 por cada dólar invertido en anuncios de YouTube.

Tendríamos x sub y multiplicado por

4 + x sub f multiplicado por 25.

Y esta es la función objetivo que queremos maximizar.

[MUSIC]

En síntesis, hemos modelado exitosamente el caso de la optimización de la mezcla

de canales digitales.

En el modelo tenemos la maximización del incremento en ingresos.

Sujeto a el tope de inversión, el presupuesto,

la proporción de inversión en Facebook y la no negatividad de las variables.

[MUSIC]

# Solución e interpretación del modelo

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/RHQh0/solucion-e-interpretacion-del-modelo>

Hola, en este video se presentará la solución e interpretación de un problema

de optimización de mezcla.

En este caso,

trabajaremos la optimización de la mezcla en canales de mercadeo digital.

El modelo de optimización busca maximizar el incremento en ventas.

Que genera la inversión en dólares en anuncios de YouTube y anuncios en

Facebook.

Sujeto a respetar el total de inversión máxima en anuncios de YouTube y Facebook.

Respetar el presupuesto máximo.

Garantizar el porcentaje mínimo de inversión en Facebook.

Y garantizar que las inversiones no sean negativas.

Para solucionar el problema, necesitamos un optimizador.

Es importante resaltar la relación que tiene un usuario o decisor con los

optimizadores.

Un optimizador es una pieza de software que contiene algoritmos especializados

para resolver problemas de optimización.

El usuario puede comunicarse directamente con el optimizador a través de

lenguaje especializado.

Pero también el usuario puede usar una interfaz de usuario,

la cual le permite construir y resolver modelos más rápidamente.

Así, a través de la interfaz, se pueden ingresar datos y definir el modelo

usando el lenguaje algebraico, que es cercano a la notación matemática.

También es posible usar un lenguaje general de programación para comunicarse

con el optimizador.

Por último, podemos comunicarnos con los optimizadores a través de herramientas muy

conocidas como Microsoft Excel.

En este caso, no habría que usar código de programación,

pero debemos usar fórmulas y relaciones para definir los modelos.

Y tendremos a la mano optimizadores para resolverlos.

El optimizador que viene por defecto en Microsoft Excel es Solver.

Este es un complemento que usa el optimizador de la empresa

Frontline Systems Incorporated.

Esta empresa ofrece complementos de analítica predictiva y prescriptiva.

En su versión gratuita, tiene un límite de 200 variables o restricciones.

Es decir,

la suma entre variables y restricciones no debe sobrepasar 200 elementos.

Sin embargo, Frontline Systems permite la compra de licencias para poder trabajar

con la herramienta sin límites.

Veamos cómo activamos el complemento en Microsoft Excel.

Primero, debemos ir a menú de opciones en Excel donde encontraremos la pestaña

Complementos.

Aquí le damos al botón Ir y podremos revisar los complementos de Excel.

Marcaremos la herramienta de solver y presionaremos el botón de Aceptar.

Aquí verificaremos en la pestaña de datos sus pestañas de análisis,

el botón de Solver.

Así, tendríamos Solver activado para nuestro uso.

[MUSIC]

Para ingresar nuestro modelo a Excel,

primero debemos colocar los parámetros en celdas que luego podamos referenciar.

Así, si los parámetros cambian,

no tendremos problemas actualizando el modelo para resolverlo nuevamente.

En este caso,

colocamos en las celdas resaltadas los parámetros de incremento en ventas.

Y tope máximo de inversión para cada uno de los canales.

El presupuesto máximo de inversión y el porcentaje mínimo de inversión en

Facebook.

Para las variables, debemos dejar una celda para cada variable.

Una para la cantidad de invertir en YouTube y una para la cantidad de invertir

en Facebook.

Así, podemos referenciarlas en las expresiones matemáticas del modelo.

Estas celdas son las que modificará el optimizador en la solución final.

Por lo tanto, es preferible dejarlas vacías.

[MUSIC]

Para implementar las dos restricciones acerca de inversión máxima en los canales,

debemos revisar cuál es el sentido de la restricción.

En este caso, es de menor o igual que para las dos restricciones.

Ahora bien, agregamos el tope de inversión referenciando

la celda D5 para YouTube y la celda D6 para Facebook.

Por último,

vamos a agregar la referencia de la celda que estamos usando para la variable.

De cuánto invertir en YouTube, en D14, y cuánto invertir en Facebook, en D15.

[MUSIC]

Ahora bien,

queremos modelar la restricción sobre respetar el presupuesto máximo.

Para ello elegimos el sentido de la restricción,

que en este caso es menor o igual que.

Utilizamos el parámetro de presupuesto que se encuentra en la celda d8.

Y, en esta celda, vamos a agregar la suma de la celda que representa la

inversión en anuncios de YouTube.

Es decir, D14 más la celda que representa la inversión en anuncios de Facebook,

es decir, D15.

[MUSIC]

Para agregar la restricción de que, por lo menos,

el 40% de la inversión debe ser en Facebook.

Debemos agregar nuestro sentido de la restricción,

que también sería de menor o igual que.

Ahora debemos agregar el lado derecho.

Aquí ponemos la celda que representa la inversión en Facebook.

Y del lado izquierdo, deberíamos agregar la suma de la cantidad

invertida en YouTube más la cantidad invertida en Facebook.

Multiplicada por el parámetro que tenemos en la celda D10.

Y ese parámetro divido entre 100.

De esta forma, tendremos la suma de toda la inversión,

multiplicada por 0.4 o un 40%.

Para ingresar la función de objetivo, no tenemos sino que agregar la suma producto.

Entre el parámetro de incremento en ventas y las variables de

decisión que tenemos en las celdas D14 y D15.

you tenemos las relaciones necesarias en nuestra hoja de cálculo.

Ahora, vamos a abrir el complemento de Solver e ingresar el modelo.

Empecemos estableciendo un objetivo.

Al presionar este botón, podemos seleccionar la celda I12,

donde previamente agregamos la fórmula para la función objetivo.

Luego, definimos si queremos maximizar, minimizar o buscar un valor específico.

En este caso, queremos maximizar el incremento en ventas.

A continuación, seleccionamos las celdas D14 y D15,

que representan las variables de decisión.

El optimizador podrá cambiar los valores de estas celdas.

Ahora vamos a agregar las restricciones.

Al presionar el botón Agregar,

Solver nos pregunta por los dos lados de la restricción.

Aquí podemos seleccionar varias restricciones,

siempre y cuando tengan el mismo sentido.

En este caso, todas tienen el sentido de menor o igual que.

Así podemos seleccionar el rango de G4 a G7,

you que estas cuatro restricciones son de menor o igual que.

Luego, seleccionamos el sentido de las restricciones.

Y luego el rango del lado derecho, I4 a I7.

[MUSIC]

Es importante resaltar que estos dos rangos deben ser del mismo tamaño.

[MUSIC]

Ahora le damos en Aceptar y tenemos nuestras restricciones agregadas.

Pero bueno, podemos estarnos preguntando,

qué pasa con las restricciones de no tener inversión negativa en los canales.

Pues en ese caso, no es necesario agregarlas,

you que Solver tiene esta casilla.

En la que ofrece la opción de garantizar que el valor de las

variables sean no negativas.

Luego, debemos escoger el método de resolución.

En este caso, como es un problema de optimización lineal,

vamos a escoger Simples LP.

Al presionar Resolver,

podemos decidir conservar la solución en la hoja de cálculo.

Y requerir un informe de sensibilidad que nos permitirá saber cómo se ve la

solución afectada a pequeños cambios en los parámetros.

you con esto podemos, darle Aceptar y tendríamos la solución en la

hoja de cálculo y el informe generado.

Y voilá, tenemos la solución.

[MUSIC]

La solución óptima de nuestro problema será de mucha utilidad para los tomadores

de desición.

En este caso,

el modelo nos recomienda que para lograr un incremento en ventas de $211.200.

Debemos invertir $7.800 en anuncios de

YouTube y $7.200 en anuncios de Facebook.

Además, podemos notar que utilizamos todo el presupuesto.

En el informe de sensibilidad, podemos revisar el valor final

del lado derecho de cada una de las restricciones de nuestro modelo.

Por ejemplo, se invirtieron $7.800 en YouTube, de los 10.000 disponibles.

Además, tenemos una columna llamada Precio Sombra.

Que nos indica el efecto que tendría en la solución el aumentar el lado derecho de la

restricción en una unidad.

Así, si aumentamos la inversión máxima en YouTube en $1,

la solución no se vería afectada.

En cambio, si aumentamos en $1 la inversión máxima en Facebook,

eso nos representaría un incremento adicional en los ingresos de $21.

O por ejemplo, si aumentamos una unidad del presupuesto máximo,

eso aumenta el valor de la función de objetivo en $4.

[MUSIC]

SEMANA 2

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/jZc1e/supuestos-de-la-optimizacion-lineal>

# Supuestos de la optimización lineal

Hola. Bienvenidos a este video,

que explicará los principios sobre los que se

fundamentan los modelos de optimización lineal.

Con frecuencia, uno se sorprende por la

efectividad como se resuelven los modelos de optimización.

Modelos con miles de variables y restricciones son resueltos en segundos,

pero ¿qué hace que estos modelos de gran tamaño sean resueltos de forma tan rápida?

La respuesta está en la estructura matemática de los modelos de optimización lineal.

Un modelo optimización lineal tiene n variables de decisión,

en este caso las variables x\_1, x\_2, hasta x\_n.

Con estas variables formulamos una función objetivo,

que puede ser de minimización o maximización,

y un grupo de n restricciones que se deben satisfacer simultáneamente.

Los parámetros son los costos c en la función objetivo, en azul,

los coeficientes a en las restricciones en púrpura,

y los coeficientes b del lado derecho de las restricciones, en naranja.

Con las variables y los parámetros formamos

expresiones lineales en la función objetivo y las restricciones.

Estas restricciones lineales pueden ser de 3 tipos: de menor o igual,

de mayor o igual o de igualdad.

Aunque cada restricción lineal solo puede tomar 1 de esos tipos,

en un mismo modelo se pueden combinar varios tipos de restricciones.

Detrás de esta linealidad existen 4 supuestos que son

importantes identificar para entender los límites de estos modelos de optimización.

La proporcionalidad nos indica que la contribución de cada variable

a la función objetivo es proporcional al valor que tome la variable.

Por ejemplo, si el costo c\_j es igual a 4 y la

variable x\_j nos indica que debemos producir un galón de producto,

el aporte a la función objetivo será de 4.

Si la variable indica que debemos producir 2 galones,

el aporte será de 8 y así sucesivamente.

De forma similar, la contribución de cada variable al lado izquierdo de la

restricción es proporcional al valor que toma la variable.

En el mismo contexto de producción,

podemos tener un insumo limitado en kilogramos.

Si producimos 1 galón de producto,

consumimos 100 gramos de insumo,

pero si producimos 3 galones,

consumimos 300 gramos de insumo.

Es decir, el consumo de insumo es

proporcional al nivel de producción especificado por la variable de decisión.

En una expresión lineal,

la aditividad suma las contribuciones individuales de las variables.

Esto ocurre tanto en la función objetivo como en las restricciones.

El supuesto de aditividad prohíbe términos o

interacciones cruzadas producto de multiplicación de variables.

El supuesto de divisibilidad

establece que las variables de decisión toman valores continuos.

En términos generales, no hay garantía que al resolver un modelo

de optimización se obtengan valores enteros o discretos.

El supuesto de certidumbre establece que los valores de cada parámetro c,

a y b son parámetros conocidos.

En la realidad, todos esos parámetros tienen un grado de incertidumbre,

por lo que se trata de usar para estos parámetros la mejor estimación posible,

y se suaviza el supuesto,

explorando soluciones ante diferentes escenarios de esos parámetros.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

Aunque estos supuestos pueden parecer a primera vista restrictivos,

no podemos perder de vista lo siguiente.

Todo modelo es una representación de la realidad.

Los modelos de optimización lineal,

aunque limitados a sus supuestos,

pueden capturar fielmente la esencia del problema que se quiere resolver.

Existen una cantidad de trucos de modelamiento que permiten linealizar modelos que

a primera vista violan supuestos como la proporcionalidad y la aditividad.

La incertidumbre se puede incorporar a través del análisis de sensibilidad

y a través de metodologías que incorporan dentro del modelo de optimización lineal,

múltiples escenarios, como es el caso de la

optimización estocástica y la optimización robusta.

Exigir que las variables tomen valores enteros es posible.

Sin embargo, esta exigencia tiene un costo computacional alto,

ya que usualmente es necesario resolver una serie de modelos de optimización lineal.

Al entender los supuestos y lograr transformar nuestro

modelo para que cumpla con el molde que nos impone la linealidad,

ganamos en la efectividad de los métodos de solución y en el escalamiento.

Estos modelos pueden tener un gran número de variables y restricciones,

y se resuelven muy rápidamente.

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/k9rGH/solucion-de-modelos-de-optimizacion-lineal>

# Solución de modelos de optimización lineal

Hola, bienvenidos a este video que explicará los principios sobre los que se

fundamenta la solución de modelos de optimización lineal.

Para entender lo que hay detrás de los métodos de solución de optimización lineal

tomaremos un ejemplo de mezcla de canales de mercadeo.

Una empresa ha visto que su participación en el mercado ha caído en los

últimos meses.

Por lo que han tomado la decisión de implementar una nueva estrategia

de mercadeo, a través del uso de canales digitales,

para promocionar sus productos y aumentar sus ventas.

Se ha decidido empezar con YouTube y Facebook Ads.

Según el departamento de analítica,

son los canales que más frecuentan sus clientes.

A continuación, identificaremos los componentes del modelo de optimización que

le permite a la empresa conseguir el mayor incremento estimado en ventas.

Cumpliendo con algunas reglas de negocio como no exceder su presupuesto y mantener

una diversificación de los canales.

Para empezar, identifiquemos la información con la que contamos.

Tenemos un parámetro que nos indica cuánto incremento se espera en

ventas dado un monto de inversión en cada canal.

Se espera que las ventas incrementen en 25 dólares por cada dólar invertido en

Facebook.

Y que incrementen 4 dólares por cada dólar invertido en YouTube.

De acuerdo al mercado potencial que podemos alcanzar con estos canales,

tenemos un tope de inversión en cada canal,

la inversión en los canales no debe sobrepasar estos límites.

Finalmente, tenemos el presupuesto que la empresa ha destinado a invertir en los

canales en esta campaña de mercadeo.

En cuanto a las variables de decisión la empresa debe decidir

cuánto dinero invertir en YouTube, esta variable la denominamos XY.

La empresa también debe decidir cuánto dinero invertir en Facebook,

esta variable la denominamos XF.

En cuanto a las restricciones sabemos que la empresa no puede invertir más de 10 mil

dólares en YouTube ni más de 7200 en Facebook.

Adicional a esto, la inversión realizada en ambos canales no debe superar los 15

mil dólares, pues este es el presupuesto que tiene la empresa para la campaña.

Por efectos de diversificación, los expertos en mercadero han recomendado que

por lo menos el 40% de la inversión se haga en Facebook.

Finalmente, tenemos las restricciones sobre la naturaleza de las variables,

que garantizan que la inversión en YouTube y en Facebook tomen valores continuos

mayores o iguales a 0.

Finalmente, expresamos la función objetivo de la empresa.

En este caso, la empresa desea maximizar el incremento en ventas.

Para esto, multiplicamos cada variable de decisión que representa la inversión en

cada canal por su incremento en ventas correspondiente,

y sumamos los dos términos.

En síntesis,

el siguiente modelo representa el caso de la optimización de canales digitales.

you con nuestro modelo definido miraremos como los optimizadores lineales lo

resuelven.

Navegaremos el método de solución cubriendo varios conceptos que son claves

para entender lo que hay detrás del software de optimización lineal.

Primero, miraremos cómo el modelo que hemos definido define un espacio de

soluciones factibles.

Segundo, gracias a los supuestos de linealidad podremos

caracterizar dónde se encuentra la solución óptima.

Y tercero, revisaremos a los posibles estados a los que

podemos llegar cuando resolvemos un modelo de optimización lineal.

Tomando nuestro ejemplo, miremos cómo se define el espacio de factibilidad y

dónde se encuentra la mejor solución.

Aprovechando que en este caso solo tenemos dos variables de decisión,

podemos graficar el espacio o región de factibilidad de nuestro problema.

Así, podremos entender dónde están nuestras soluciones o mezcla de

inversión en los canales digitales.

Sabemos que la inversión en YouTube y la inversión en Facebook Ads debe ser 0

o positivo, pues no podemos invertir cantidades negativas de dinero.

Esto lo representamos gráficamente teniendo en

cuenta únicamente el área que sea mayor o igual a 0.

Y nos enmarca en el primer cuadrante.

Sabemos que nuestro tiempo en YouTube es limitado por lo que debemos respetar

nuestra inversión máxima en esa plataforma que es de 10 mil dólares.

Nuestra región factible se verá reducida al añadir esta restricción que define un

espacio por la línea de color naranja.

De forma similar la inversión máxima en Facebook Ads es de 7200 dólares,

por lo que acotamos más nuestra región,

como lo muestra el plano definido por la línea azul claro.

De forma agregada,

la empresa destina a la campaña digital un presupuesto máximo de 15 mil dólares.

Por lo que la suma de nuestras dos variables debe ser menor o

igual a este valor.

Esta nueva restricción, definida por la recta de color azul oscuro,

nos limita aún más nuestra región factible.

Como la empresa debe cumplir con que por lo menos un 40% de la inversión total en

canales digitales se haga en Facebook,

una nueva restricción en púrpura nos limita aún más nuestra región.

Dado que todas las restricciones de nuestro modelo se deben satisfacer

simultáneamente, al intersectarlas, definimos nuestra región factible,

demarcada por el espacio en gris.

Dado que este espacio contiene todos los valores de inversión en

YouTube y Facebook, que cumplen con todas las condiciones de nuestro problema,

de allí podríamos encontrar la mejor solución.

Para hacerlo, podríamos tomar cada uno de los puntos en el espacio gris y evaluarlos

en la función objetivo.

Aquel punto que represente la inversión en canales digitales con el mayor valor

en incremento en ventas será nuestra solución óptima.

Sin embargo, esto es equivalente a mirar la dirección en la que se maximiza nuestra

función objetivo de incremento en ventas y encontrar el mejor punto

en esta dirección.

Esta dirección se conoce como el gradiente de nuestra función objetiva.

Gráficamente, el gradiente está dado por el vector en negro.

Si nos movemos en la dirección del gradiente,

podremos encontrar las combinaciones de inversión en los canales en el espacio de

factibilidad que tiene los mejores valores de incremento en ventas.

Las líneas punteadas que llamamos isoclinas son rectas perpendiculares al

vector gradiente.

Todos los puntos sobre la línea punteada tienen mismo valor en la función objetivo.

Si nos alejamos lo más que podamos en la dirección del gradiente,

sin salirnos de la región de factibilidad,

encontraremos el punto extremo que maximiza el incremento en ventas.

A este punto lo llamamos solución óptima.

Para nuestro modelo la solución óptima nos indica que debemos invertir 7800 dólares

en YouTube y 7200 dólares en Facebook,

para tener un incremento máximo en ventas de 211200 dólares.

Al ser única esta solución, decimos que este modelo tiene un óptimo finito.

Para entender mejor este concepto del gradiente y las isoclinas, podemos

visualizar nuestro espacio de factibilidad y la función objetivo en tres dimensiones.

En este gráfico, añadimos un tercer eje que representa la función objetivo.

El plano verde representa el valor del incremento en ventas para cada combinación

de mezcla de canales digitales.

Si proyectamos estos valores del plano verde en la región de factibilidad,

identificamos las isoclinas.

Como la función objetivo es lineal, es un plano con una inclinación constante.

La mezcla de canales más alto en este plano verde será la solución más optima.

Esta coincide con el punto extremo en rojo que intercepta la última isoclina,

como lo mostramos en dos dimensiones.

Apartándonos un poco del ejemplo y de forma más general,

podemos concluir que la linealidad de la función objetivo y las restricciones,

nos garantiza que de existir un óptimo,

este siempre estará en un punto extremo de la región de factibilidad.

Por esta razón,

los métodos de solución de optimización lineal se concentran en encontrar puntos

extremos óptimos, descartando así una gran porción de la región de factibilidad.

La solución de un modelo de optimización no necesariamente es única.

Existen situaciones en las que múltiples soluciones son igualmente óptimas.

Esta es una situación interesante, you que enriquece la toma de decisiones.

Para ilustrar esta situación, asumamos ahora que para el canal de Facebook

se estima un incremento de ventas de 4 dólares por cada dólar invertido.

Si cambian los incrementos en ventas para el canal en Facebook,

estaría cambiando la función objetivo,

por lo que cambiaría la dirección de optimización determinada por el gradiente.

Este cambio, implica que las isóclinas cambiaran pues tenemos un nuevo gradiente.

Ahora las soluciones óptimas hacen parte de un segmento determinado por dos

puntos extremos y sus puntos intermedios.

Sin importar el punto que elijamos en ese segmento,

tendremos una mezcla de inversión en canales digitales óptima que dará un valor

de 60 mil dólares en incremento en ventas.

A diferencia del caso anterior del óptimo finito,

ahora tenemos múltiples soluciones óptimas.

Ahora miremos este caso en tres dimensiones, con un nuevo eje,

dado por el incremento en ventas.

El plano verde, determinado por la nueva función objetivo hace que todo el segmento

rojo sean soluciones óptimas alternas.

Todas estas mezclas de inversión en canales digitales serán igualmente óptimas

con un valor de 60 mil en incremento en ventas.

Cuando construimos modelos de optimización, es posible que,

como parte del proceso de construcción, omitamos algunas condiciones.

Estas omisiones saldrán a flote como un estado final del optimizador

que nos indica que podemos mejorar indefinidamente nuestro objetivo.

Este sinsentido lo tendremos que interpretar para ajustar nuestro modelo.

Pensemos por un momento que no imponemos la restricción agregada al

presupuesto y que omitimos el límite en la inversión en el canal de Facebook.

Al retirar estas dos restricciones azules de nuestro modelo,

nuestro espacio de factibilidad aumenta y deja de estar acotado.

Al optimizar en la dirección del gradiente, notamos por las isóclinas que

es posible incrementar las ventas de forma arbitraria.

Por lo que podemos decir que siempre habrá mezclas de inversión en canales que nos

permitirán incrementar las ventas cada vez más.

Esto claramente no tiene sentido en la realidad y nos indicará que hemos

omitido algo crítico en nuestro modelo.

En este caso la restricción de presupuesto y límite de inversión en el canal de

Facebook.

Graficando el incremento en ventas en un tercer eje podemos

visualizar esta situación.

El plano verde crece,

pero al estar el espacio de factibilidad no acotado, siempre es posible

encontrar mejores mezclas de inversión que obtienen un mayor incremento en ventas.

Afortunadamente, el software de optimización detecta esta situación y se

detiene, avisándonos que ha identificado esta situación.

Nos queda a nosotros como modeladores identificar las causas de este

no acotamiento y corregir el modelo.

Existen situaciones en las que deseamos que un modelo satisfaga

restricciones que entran en conflicto.

Esto hace que la región de factibilidad desaparezca y que simplemente no haya una

solución factible.

Volviendo a nuestro modelo,

¿qué pasaría si YouTube impone ahora una nueva regla en la que se debe invertir

mínimo 12 mil dólares en publicidad para poder conservar la tarifa actual?

Con esa nueva regla, nuestro modelo entra en conflicto al tratar de satisfacer las

restricciones de presupuesto agregado,

de participación mínima en Facebook y el límite del canal de Facebook.

Al intentar que también se cumpla con una inversión en YouTube de por lo menos 12

mil dólares, no existe una sola mezcla de inversión de canales que lo logre.

Como se muestra en la gráfica, hay dos espacios definidos por

las restricciones que no se intersectan, por lo que la región de

factibilidad desaparece y se concluye que no existe solución factible.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

En este video vimos cómo, la eficiencia de la solución de los modelos de optimización

lineal se fundamenta en su estructura matemática dada por sus cuatro supuestos.

Proporcionalidad, aditividad, certidumbre y divisibilidad.

Los modelos de optimización lineal tienen métodos de solución eficientes que nos

permiten resolver problemas con muchas variables y restricciones de forma rápida.

La estructura matemática de los modelos de optimización lineal garantiza que podemos

encontrar el óptimo en los puntos extremos del espacio de solución.

Esto hace que el método se concentre en descubrirlos de forma eficiente.

El método de solución puede terminar en varios estados finales.

Óptimo finito, óptimos alternos, óptimo no acotado e infactibilidad.

Sin entrar en el detalle del método de solución, es importante entender los

principios que están detrás de la solución efectiva de los modelos de optimización.

[MUSIC]

# Escalamiento de modelos de optimización: Formulación explícita

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/upvH9/escalamiento-de-modelos-de-optimizacion-formulacion-explicita>

Hola, bienvenidos a este video sobre el escalamiento de modelos de optimización.

En este video, construiremos una formulación explícita que nos invitará

a reflexionar sobre la integración del modelo y sus datos.

Tomaremos como ejemplo un caso de distribución de café tostado.

Consideremos el caso de una empresa que tiene unas plantas tostadoras de café que

abastecen café fresco a sus puntos de venta.

En estos puntos, se preparan las tazas de café para el consumidor final.

Las plantas a la izquierda tienen una capacidad de tostar café dadas en

kilogramos por día.

Los puntos de venta a la derecha demandan café fresco en kilogramos por día.

Y dado que las plantas tostadoras están ubicadas en diferentes zonas,

los costos de envía por kilogramo varían entre ellas.

Entonces, la empresa necesita determinar.

¿Cuál es la mejor forma de abastecer el café tostado a sus puntos de venta desde

las plantas tostadoras diariamente?

Para empezar,

estructuremos y formulemos el modelo de optimización de forma explícita.

La empresa necesita decidir cuánto café enviar desde cada planta

tostadora a cada uno de sus puntos de venta.

Gráficamente, queremos determinar cuánto café enviar desde la planta uno a cada uno

de sus puntos de venta.

Estas variable de decisión las denominamos X 1,1, X 1,2, X 1,3, y X 1,4.

Donde el primer subíndice numérico de la variable hace

referencia a la planta tostadora.

Y el segundo índice numérico hace referencia al punto de venta.

De forma similar, el café enviado desde la planta dos a cada uno de los

puntos de venta los denominamos X2,1, X2,2, X2,3 y X2,4.

Estos también son valores que el modelo de optimización debe determinar.

Finalmente, el café enviado desde la planta tres a los puntos de venta los

denominamos X 3,1, X 3,2, X 3,3, y X 3,4.

En este caso, nuestro modelo tiene 12 variables de decisión.

Dadas por las combinaciones posibles de envío entre las tres plantas y los cuatro

puntos de venta.

Es importante resaltar que estos envíos desde las plantas a los puntos de venta no

pueden tomar valores negativos.

Por lo que todas estas variables se declaran como no negativas.

En cuanto a la información,

los conjuntos están dados por las plantas tostadoras y los puntos de venta.

Y como parámetros tenemos las capacidades diarias de las plantas tostadoras.

Demandas diarias en los puntos de venta,

y costos de envío entre todo par planta-punto de venta.

Estos datos definen nuestra instancia del problema de distribución de café tostado.

Podemos resumir la información en la siguiente forma tabular.

La primera tabla contiene la información de la capacidad de las plantas.

La segunda tabla consolida la demanda de los puntos de venta.

Y la tercera tabla contiene la matriz de costos de envío por kilogramo desde

las plantas a los puntos de venta.

¿Pero qué limita el valor de los envíos entre las plantas y los puntos de venta?

En cuanto a las plantas tostadoras,

la cantidad de café tostado que envíamos desde la planta tostadora uno.

Hacia los cuatro puntos de venta,

no debe exceder la capacidad de la planta de 200 kilogramos día.

De forma similar, el café tostado que enviamos desde la planta tostadora dos

hacia los cuatro puntos de venta.

No debe exceder su capacidad de 100 kilogramos día.

Y finalmente, el café tostado que enviamos desde la planta tostadora tres a los

puntos de venta.

No debe exceder su capacidad de 120 kilogramos día.

En cuanto a los puntos de venta, el total de café que enviamos desde la planta uno,

la planta dos y la planta tres.

Debe ser sufciente para satisfacer los 100 kilogramos día que demanda

el punto de venta uno.

De forma similar, el total de café que enviamos desde las plantas uno,

dos y tres.

Debe satisfacer los 90 kilogramos día que demanda el punto de venta dos.

Igual para el punto de venta tres, que demanda 80 kilogramos día.

Y para el punto de venta cuatro, que demanda 90 kilogramos día.

¿Pero cómo determinamos si el plan de distribución entre plantas y puntos de

venta es el mejor?

Esto lo podemos evaluar a través de la función objetivo que minimiza el costo

total de distribución.

Desde la planta uno establecemos cuánto café enviaremos a cada uno de los puntos

de venta.

Y lo multiplicamos por su costo unitario de envío.

Igual hacemos para la planta dos y para la planta tres.

Al final, la suma de todos los envíos desde las plantas a los puntos de venta.

Multiplicados por sus costos unitarios de envío,

establece el costo total de distribución.

El plan de envíos que minimice este costo es el mejor.

Poniendo todo junto, nuestro modelo de optimización de distribución de café

tostado queda de la siguiente manera.

La función objetivo minimiza el costo total de distribución diaria, sujeto a.

Cumplir con la capacidad de cada planta tostadora,

cumplir con la demanda diaria de cada uno de los puntos de ventas.

Y, como estamos haciendo envíos de kilogramos de café,

estas variables de decisión son no negativas.

Este modelo lo resolvemos a través de un software de optimización.

El costo total de distribución es de 4.700.

La planta uno debe enviar 90 kilogramos de café al punto de venta dos y 50 kilogramos

al punto de venta tres.

Esta planta no opera a su capacidad plena,

you que 60 kilogramos de su capacidad no son utilizados.

La planta dos surte al punto de venta uno con 70 kilogramos y al punto de venta tres

con 30 kilogramos.

Finalmente, la planta tres envía 30 kilogramos

al punto de venta uno y 90 kilogramos al punto de venta cuatro.

Las plantas tostadoras dos y tres operan a su plena capacidad de producción.

Como esperábamos, las demandas de los cuatro puntos de venta se satisfacen con

este plan de envíos de mínimo costo.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

En este video, vimos cómo las formulaciones explícitas combinan la

estructura del modelo con los datos.

Son fáciles de escribir y entender.

Las formulaciones explícitas cambian si cambian los datos.

Es decir, si tuviésemos más plantas o puntos de venta,

tendríamos que rescribirla con la nueva información.

Las formulaciones explícitas son valiosas para depurar un modelo de optimización.

Al ver explicitamente las expresiones de la función objetivo y las restricciones

podemos verificar si el modelo es correcto.

El software de optimización acepta formatos de modelos explícitos.

Ejemplos de ello son el formato LP o la forma como escribimos modelos en Excel con

Solver.

Sin embargo, a pesar de sus beneficios,

las formulaciones explícitas son difíciles de mantener.

Especialmente cuando debemos correr un modelo de optimización de forma rutinaria.

Este es un caso bastante común en las organizaciones,

donde los datos cambian de un período a otro.

Próximamente, aprenderemos nuevas formas de expresar modelos más generales,

que separan la estructura del modelo de los datos.

Pero eso será tema de otro video.

[MUSIC]

# Escalamiento de modelos de optimización: Indexación

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/EKUHv/escalamiento-de-modelos-de-optimizacion-indexacion>

Hola, bienvenidos a este video sobre el escalamiento de modelos de optimización.

En este video, aprenderemos a escribir modelos generales

que separan la estructura del modelo de los datos que lo alimentan.

Retomaremos como ejemplo el caso de distribución de café tostado.

Este es el caso de una empresa que tiene unas plantas tostadoras de café que

abastecen café fresco a sus puntos de venta.

En estos puntos, se preparan las tazas de café para el consumidor final.

Las plantas a la izquierda,

tienen una capacidad de tostar café dadas en kilogramos por día.

Los puntos de venta a la derecha, demandan café fresco en kilogramos por día.

Y dado que las plantas tostadoras están ubicadas en diferentes zonas,

los costos de envío por kilogramo varían entre ellas.

Entonces, la empresa necesita determinar, ¿cuál es la mejor manera de abastecer el

café tostado a sus puntos de venta desde sus plantas tostadoras diariamente?

Para encontrar el mejor plan de distribución de café tostado,

podemos formular de forma explícita el modelo de optimización.

Definimos como variable decisión la cantidad de café a enviar desde cada

planta tostadora a cada uno de sus puntos de venta.

La función objetivo minimiza el costo total de distribución diario.

Sujeto a cumplir con la capacidad de cada planta tostadora,

cumplir con la demanda diaria de cada uno de los punto de venta.

Y, como estamos haciendo envíos de kilogramos de café,

estas variables de decisión son no negativas.

Es importante resaltar que esta formulación explícita

combina la estructura del modelo con los datos del problema.

Si los datos cambian,

debemos volver a plantear este modelo de optimización para poderlo resolver.

Esta falta de separación entre modelo y datos hace difícil mantenerlo,

y en algunos casos puede ser problemático.

Afortunadamente, veremos cómo a través de la indexación sobre conjuntos podemos

escribir modelos más generales que los modelos explícitos.

Los conjuntos nos ayudan a agrupar objetos del mismo tipo.

En este caso,

podemos definir un conjunto T como el conjunto de las plantas tostadoras.

El conjunto T tiene los elementos 1, 2, y 3 asociados a las plantas tostadoras.

Definimos un índice genérico i que nos permitirá recorrer los elementos del

conjunto T.

Cuando i toma el valor de 1 apuntamos al primer elemento del conjunto.

Cuando i toma el valor 2 al segundo elemento.

Y cuando i toma el valor de 3, al tercer elemento.

Estos elementos corresponden a las plantas tostadoras 1, 2 y 3.

Otro conjunto en este ejemplo es el de los puntos de venta que denominamos P.

Los elementos del conjunto P son los números del 1 al 4,

que corresponden a los puntos de venta.

Con el índice genérico J¿j recorremos los elementos del conjunto P.

Cuando j toma el valor de 1, apuntamos al primer punto de venta.

Cuando j toma el valor de 2, al segundo, y así sucesivamente hasta cuando j toma el

valor de 4, que apunta al cuarto punto de venta.

Una vez definimos los conjuntos y los índices,

los podemos utilizar para referirnos a nuestros parámetros de forma general.

Por ejemplo, el parámetro ki representa la capacidad de la planta tostadora i en el

conjunto de plantas T.

De esta forma, podemos referirnos a cada una de las capacidades de

las plantas tostadoras recorriendo el conjunto T.

Cuando i toma el valor de 1, nos referimos a la capacidad de la planta tostadora k1,

que es igual a 200.

Cuando i es 2, k2 es 100.

Y cuando i es 3, k3 es 120,

que corresponde a la capacidad de la tercera planta.

De forma similar, el parámetro dj representa la demanda del punto de venta j

en el conjunto de puntos de venta P.

Con este parámetro indexado, podemos referirnos a cada una de las demandas de

los puntos de venta, recorriendo ahora el conjunto P.

Cuando j recorra los valores del 1 al 4 en el conunto P,

haremos referencia a las demandas d1, d2, d3 y d4,

que toman los valores de 100, 90, 80 y 90 respectivamente.

En el caso de los costos de envío,

estos dependen de la planta tostadora de origen y del punto de venta de destino.

Por esta razón, definimos el parámetro indexado C sub ij,

o el costo de envío desde la planta tostadora i al punto de venta j.

De esta forma, podemos almacenar toda la matriz de costos de envío y referirnos

a cada elemento de forma conveniente.

Como Cij está definido para todo i en T y j en P, primero,

anclamos el índice i en la primera planta, y recorremos todos los puntos de venta.

Luego, el indice i apunta a la segunda planta y recorremos todos los puntos

de venta.

Y de igual forma para la tercera planta.

Las variables de decisión representan los envíos desde las plantas tostadoras a los

puntos de venta.

Definimos la variable X sub ij como la cantidad de café a enviar desde la planta

tostadora i al punto de venta j.

Como Xij está definido para todo i en T y j en P,

primero tenemos las variables de la primera planta cuando i es igual a 1.

Luego, las de las segunda planta cuando i es igual a 2.

Y finalmente, las variables de la tercera planta cuando i es igual a 3.

Una vez definidos los conjuntos e índices,

y los parámetros y variables indexadas, nos enfocaremos en formular un modelo

general o metamodelo que separa la estructura de los datos.

De forma general, nuestra variable decisión es X sub i j,

la cantidad de café que enviaremos desde la planta tostadora i al punto de venta j.

En cuanto a la información, los conjuntos son, T, las plantas, y P,

los puntos de venta.

Los parámetros son: k sub i, la capacidad de la planta i, d sub j,

la demanda del punto de venta j.

Y c sub ij, el costo de enviar desde la planta i hasta el punto de venta j.

En cuando a las restricciones, tenemos las restricciones de capacidad en las plantas,

y de demanda en los puntos de venta.

Comencemos con la capacidad, enfocándonos en la planta 1.

Esta restricción nos dice que todo lo que enviemos desde la planta 1 a los puntos de

venta 1, 2, 3 y 4, no debe exceder su capacidad de 200.

Para hacer más compacta esta expresión, podemos sumar sobre todos los puntos de

venta j en el conjunto P, anclándonos en la primera planta planta tostadora.

Entonces, los envíos consolidados desde la planta tostadora 1 a todos

los puntos de venta, son las sumas sobre los j en P de los X1j.

Estos envíos consolidados no deben exceder la capacidad de 200 kilogramos de la

planta tostadora 1.

De forma similar, podemos escribir las demás restricciones de capacidad de

las plantas tostadoras haciendo uso de la suma.

Para cada planta tostadora, la suma de los envíos hacia todos los puntos de

venta no debe exceder su capacidad.

Como vemos, esta restricción de capacidad se replica para cada planta tostadora,

y es muy similar.

Haciendo uso de la indexación, es posible escribirla de forma compacta y general.

Para hacerlo, escribiremos una restricción general tomando como referencia

una planta tostadora genérica i en el conjunto de plantas T.

La restricción quedaría así.

Para toda planta tostadora i en T, la suma de los envíos a todos los puntos de

venta j en P, no debe exceder su capacidad k sub i.

El paratodo i en T,

replica esta restricción para toda planta en el conjunto de plantas tostadoras T.

Es decir,

habrá tantas restricciones de este tipo como elementos haya en el conjunto T.

En cuanto a la restricción de demanda, enfoquémonos en el punto de venta 1.

Esta restricción, nos dice que todo el cafe que enviemos desde las plantas 1,

2 y 3 al punto de venta 1, debe satisfacer su demanda de 100 kilogramos.

Para hacer mas compacta esta expresión, podemos sumar sobre todas las plantas i en

el conjunto T, anclándonos en el primer punto de venta como destino.

Esa misma restricción de demanda aplica para todo punto de venta j en el

conjunto P.

Así como escribimos la recepción para el punto de venta 1,

podemos replicar las restricciones de demanda para los puntos de venta 2, 3 y 4.

Y podemos escribir la restricción de forma general tomando como referencia un

punto de venta genérico, j, en el conjunto de puntos de venta P.

La restricción quedaría así.

Para todo punto de venta Jjen P la suma de los envíos desde las plantas tostadoras i

en T debe satisfacer la demanda d sub j.

El para todo j en P, replica esa restricción para todo punto de

venta en el conjunto de puntos de venta P.

Es decir,

habrá tantas restricciones de ese tipo como elementos haya en el conjunto P.

En cuanto a las restricciones de no-negatividad,

tenemos que los envíos de café no puede tomar valores negativos.

La variable que denota el envío de la planta 1 al punto de venta 1,

toma un valor no-negativo.

Igualmente, todas las variables que envían café desde de la

planta 1 a todos los puntos de venta j en P.

En general, todas las variables que envían café desde la planta i

en T hacia el punto j en P deben tomar valores no-negativos.

Formalmente, decimos que toda planta i en T y punto de venta j en P,

la variable Xij es no-negativa.

El para todoiI en T, y para todo j en P, replica esa restricción para toda

combinación de envío posible entre planta y punto de venta.

Es decir, habrá tantas restricciones de este tipo como la multiplicación entre

el total de elementos en el conjunto T y en el conjunto P.

La función objetivo es la minimización de los costos de distribución,

desde la planta 1, la planta 2 y la planta 3.

Estos términos de la función objetivo los podemos agregar sumando sobre todos

los punto de venta j en P, y sobre todas las plantas tostadoras i en T.

Así obtenemos la función objetivo de forma general.

Minimizar la suma sobre i en T y j en P

de los envíos Xij por sus costos de envío Cij.

Esta suma agrega todos los términos para obtener el costo de distribución total

entre las plantas y los de venta.

En resumen, el modelo general, también llamado algebraico o compacto,

está dado por minizar el costo total de distribución,

sujeto a cumplir la capacidad en las plantas tostadoras.

Satisfacer la demanda de los puntos de venta,

y que lo envíos no tomen valores negativos.

Lo interesante de este modelo es que lo hemos expresado de forma general,

siendo un metamodelo de todos los problemas de distribución que envían

unidades de producto entre origenes y destinos.

Muchas herramientas y librerías de optimización aceptan modelos escritos en

esta forma.

Por ejemplo,

si los datos cambiaran porque ahora tenemos más plantas y más puntos de venta,

solo es necesario ajustar los datos y volver a correr el modelo de optimización.

Pero su estructura permanecerá intacta.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

En este video, vimos cómo las formulaciones explícitas combinan la

estructura del modelo con los datos.

Son fáciles de escribir y entender, pero difíciles de escalar si los datos cambian.

La indexación sobre conjuntos permite escribir modelos de optimización

generales y escalables.

Las formulaciones algebraicas separan la estructura del modelo de los datos.

La separación entre modelo y datos facilita el escalamiento y el

mantenimiento de los modelos de optimización.

Escribir modelos generales requiere un poco más de formalismo y un poco de

abstracción.

Sin embargo, el aprender a hacerlo se paga con creces cuando aplicamos optimización

en las organizaciones.

[MUSIC]

# Escalamiento de modelos de optimización: Indexación

<https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/EKUHv/escalamiento-de-modelos-de-optimizacion-indexacion>

Hola, bienvenidos a este video sobre el escalamiento de modelos de optimización.

En este video, aprenderemos a escribir modelos generales

que separan la estructura del modelo de los datos que lo alimentan.

Retomaremos como ejemplo el caso de distribución de café tostado.

Este es el caso de una empresa que tiene unas plantas tostadoras de café que

abastecen café fresco a sus puntos de venta.

En estos puntos, se preparan las tazas de café para el consumidor final.

Las plantas a la izquierda,

tienen una capacidad de tostar café dadas en kilogramos por día.

Los puntos de venta a la derecha, demandan café fresco en kilogramos por día.

Y dado que las plantas tostadoras están ubicadas en diferentes zonas,

los costos de envío por kilogramo varían entre ellas.

Entonces, la empresa necesita determinar, ¿cuál es la mejor manera de abastecer el

café tostado a sus puntos de venta desde sus plantas tostadoras diariamente?

Para encontrar el mejor plan de distribución de café tostado,

podemos formular de forma explícita el modelo de optimización.

Definimos como variable decisión la cantidad de café a enviar desde cada

planta tostadora a cada uno de sus puntos de venta.

La función objetivo minimiza el costo total de distribución diario.

Sujeto a cumplir con la capacidad de cada planta tostadora,

cumplir con la demanda diaria de cada uno de los punto de venta.

Y, como estamos haciendo envíos de kilogramos de café,

estas variables de decisión son no negativas.

Es importante resaltar que esta formulación explícita

combina la estructura del modelo con los datos del problema.

Si los datos cambian,

debemos volver a plantear este modelo de optimización para poderlo resolver.

Esta falta de separación entre modelo y datos hace difícil mantenerlo,

y en algunos casos puede ser problemático.

Afortunadamente, veremos cómo a través de la indexación sobre conjuntos podemos

escribir modelos más generales que los modelos explícitos.

Los conjuntos nos ayudan a agrupar objetos del mismo tipo.

En este caso,

podemos definir un conjunto T como el conjunto de las plantas tostadoras.

El conjunto T tiene los elementos 1, 2, y 3 asociados a las plantas tostadoras.

Definimos un índice genérico i que nos permitirá recorrer los elementos del

conjunto T.

Cuando i toma el valor de 1 apuntamos al primer elemento del conjunto.

Cuando i toma el valor 2 al segundo elemento.

Y cuando i toma el valor de 3, al tercer elemento.

Estos elementos corresponden a las plantas tostadoras 1, 2 y 3.

Otro conjunto en este ejemplo es el de los puntos de venta que denominamos P.

Los elementos del conjunto P son los números del 1 al 4,

que corresponden a los puntos de venta.

Con el índice genérico J¿j recorremos los elementos del conjunto P.

Cuando j toma el valor de 1, apuntamos al primer punto de venta.

Cuando j toma el valor de 2, al segundo, y así sucesivamente hasta cuando j toma el

valor de 4, que apunta al cuarto punto de venta.

Una vez definimos los conjuntos y los índices,

los podemos utilizar para referirnos a nuestros parámetros de forma general.

Por ejemplo, el parámetro ki representa la capacidad de la planta tostadora i en el

conjunto de plantas T.

De esta forma, podemos referirnos a cada una de las capacidades de

las plantas tostadoras recorriendo el conjunto T.

Cuando i toma el valor de 1, nos referimos a la capacidad de la planta tostadora k1,

que es igual a 200.

Cuando i es 2, k2 es 100.

Y cuando i es 3, k3 es 120,

que corresponde a la capacidad de la tercera planta.

De forma similar, el parámetro dj representa la demanda del punto de venta j

en el conjunto de puntos de venta P.

Con este parámetro indexado, podemos referirnos a cada una de las demandas de

los puntos de venta, recorriendo ahora el conjunto P.

Cuando j recorra los valores del 1 al 4 en el conunto P,

haremos referencia a las demandas d1, d2, d3 y d4,

que toman los valores de 100, 90, 80 y 90 respectivamente.

En el caso de los costos de envío,

estos dependen de la planta tostadora de origen y del punto de venta de destino.

Por esta razón, definimos el parámetro indexado C sub ij,

o el costo de envío desde la planta tostadora i al punto de venta j.

De esta forma, podemos almacenar toda la matriz de costos de envío y referirnos

a cada elemento de forma conveniente.

Como Cij está definido para todo i en T y j en P, primero,

anclamos el índice i en la primera planta, y recorremos todos los puntos de venta.

Luego, el indice i apunta a la segunda planta y recorremos todos los puntos

de venta.

Y de igual forma para la tercera planta.

Las variables de decisión representan los envíos desde las plantas tostadoras a los

puntos de venta.

Definimos la variable X sub ij como la cantidad de café a enviar desde la planta

tostadora i al punto de venta j.

Como Xij está definido para todo i en T y j en P,

primero tenemos las variables de la primera planta cuando i es igual a 1.

Luego, las de las segunda planta cuando i es igual a 2.

Y finalmente, las variables de la tercera planta cuando i es igual a 3.

Una vez definidos los conjuntos e índices,

y los parámetros y variables indexadas, nos enfocaremos en formular un modelo

general o metamodelo que separa la estructura de los datos.

De forma general, nuestra variable decisión es X sub i j,

la cantidad de café que enviaremos desde la planta tostadora i al punto de venta j.

En cuanto a la información, los conjuntos son, T, las plantas, y P,

los puntos de venta.

Los parámetros son: k sub i, la capacidad de la planta i, d sub j,

la demanda del punto de venta j.

Y c sub ij, el costo de enviar desde la planta i hasta el punto de venta j.

En cuando a las restricciones, tenemos las restricciones de capacidad en las plantas,

y de demanda en los puntos de venta.

Comencemos con la capacidad, enfocándonos en la planta 1.

Esta restricción nos dice que todo lo que enviemos desde la planta 1 a los puntos de

venta 1, 2, 3 y 4, no debe exceder su capacidad de 200.

Para hacer más compacta esta expresión, podemos sumar sobre todos los puntos de

venta j en el conjunto P, anclándonos en la primera planta planta tostadora.

Entonces, los envíos consolidados desde la planta tostadora 1 a todos

los puntos de venta, son las sumas sobre los j en P de los X1j.

Estos envíos consolidados no deben exceder la capacidad de 200 kilogramos de la

planta tostadora 1.

De forma similar, podemos escribir las demás restricciones de capacidad de

las plantas tostadoras haciendo uso de la suma.

Para cada planta tostadora, la suma de los envíos hacia todos los puntos de

venta no debe exceder su capacidad.

Como vemos, esta restricción de capacidad se replica para cada planta tostadora,

y es muy similar.

Haciendo uso de la indexación, es posible escribirla de forma compacta y general.

Para hacerlo, escribiremos una restricción general tomando como referencia

una planta tostadora genérica i en el conjunto de plantas T.

La restricción quedaría así.

Para toda planta tostadora i en T, la suma de los envíos a todos los puntos de

venta j en P, no debe exceder su capacidad k sub i.

El paratodo i en T,

replica esta restricción para toda planta en el conjunto de plantas tostadoras T.

Es decir,

habrá tantas restricciones de este tipo como elementos haya en el conjunto T.

En cuanto a la restricción de demanda, enfoquémonos en el punto de venta 1.

Esta restricción, nos dice que todo el cafe que enviemos desde las plantas 1,

2 y 3 al punto de venta 1, debe satisfacer su demanda de 100 kilogramos.

Para hacer mas compacta esta expresión, podemos sumar sobre todas las plantas i en

el conjunto T, anclándonos en el primer punto de venta como destino.

Esa misma restricción de demanda aplica para todo punto de venta j en el

conjunto P.

Así como escribimos la recepción para el punto de venta 1,

podemos replicar las restricciones de demanda para los puntos de venta 2, 3 y 4.

Y podemos escribir la restricción de forma general tomando como referencia un

punto de venta genérico, j, en el conjunto de puntos de venta P.

La restricción quedaría así.

Para todo punto de venta Jjen P la suma de los envíos desde las plantas tostadoras i

en T debe satisfacer la demanda d sub j.

El para todo j en P, replica esa restricción para todo punto de

venta en el conjunto de puntos de venta P.

Es decir,

habrá tantas restricciones de ese tipo como elementos haya en el conjunto P.

En cuanto a las restricciones de no-negatividad,

tenemos que los envíos de café no puede tomar valores negativos.

La variable que denota el envío de la planta 1 al punto de venta 1,

toma un valor no-negativo.

Igualmente, todas las variables que envían café desde de la

planta 1 a todos los puntos de venta j en P.

En general, todas las variables que envían café desde la planta i

en T hacia el punto j en P deben tomar valores no-negativos.

Formalmente, decimos que toda planta i en T y punto de venta j en P,

la variable Xij es no-negativa.

El para todoiI en T, y para todo j en P, replica esa restricción para toda

combinación de envío posible entre planta y punto de venta.

Es decir, habrá tantas restricciones de este tipo como la multiplicación entre

el total de elementos en el conjunto T y en el conjunto P.

La función objetivo es la minimización de los costos de distribución,

desde la planta 1, la planta 2 y la planta 3.

Estos términos de la función objetivo los podemos agregar sumando sobre todos

los punto de venta j en P, y sobre todas las plantas tostadoras i en T.

Así obtenemos la función objetivo de forma general.

Minimizar la suma sobre i en T y j en P

de los envíos Xij por sus costos de envío Cij.

Esta suma agrega todos los términos para obtener el costo de distribución total

entre las plantas y los de venta.

En resumen, el modelo general, también llamado algebraico o compacto,

está dado por minizar el costo total de distribución,

sujeto a cumplir la capacidad en las plantas tostadoras.

Satisfacer la demanda de los puntos de venta,

y que lo envíos no tomen valores negativos.

Lo interesante de este modelo es que lo hemos expresado de forma general,

siendo un metamodelo de todos los problemas de distribución que envían

unidades de producto entre origenes y destinos.

Muchas herramientas y librerías de optimización aceptan modelos escritos en

esta forma.

Por ejemplo,

si los datos cambiaran porque ahora tenemos más plantas y más puntos de venta,

solo es necesario ajustar los datos y volver a correr el modelo de optimización.

Pero su estructura permanecerá intacta.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

En este video, vimos cómo las formulaciones explícitas combinan la

estructura del modelo con los datos.

Son fáciles de escribir y entender, pero difíciles de escalar si los datos cambian.

La indexación sobre conjuntos permite escribir modelos de optimización

generales y escalables.

Las formulaciones algebraicas separan la estructura del modelo de los datos.

La separación entre modelo y datos facilita el escalamiento y el

mantenimiento de los modelos de optimización.

Escribir modelos generales requiere un poco más de formalismo y un poco de

abstracción.

Sin embargo, el aprender a hacerlo se paga con creces cuando aplicamos optimización

en las organizaciones.

[MUSIC]

SEMANA 3

# Modelamiento con variables binarias (parte 1)

[Modelamiento con variables binarias (parte 1) | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/EU3CN/modelamiento-con-variables-binarias-parte-1)

Hola, bienvenidos a esta primera parte sobre el modelamiento con variables

binarias.

Reproduce el video desde ::22 y sigue la transcripción0:22

Al formular modelos de optimización, frecuentemente nos enfrentamos con la

necesidad de plantear decisiones del tipo sí o no.

Reproduce el video desde ::31 y sigue la transcripción0:31

Algunas situaciones donde surgen naturalmente este tipo de decisiones son,

¿debo operar, o no, cierto centro de distribución?

¿Debo localizar la planta de producción en determinada ciudad?

¿Debo hacer la tarea A antes de la tarea B?

¿Debo abastecer a un cliente desde cierta bodega?

¿Debo invertir, o no, en cierta acción financiera?

¿Debo asignar cierto tipo de avión a cierta ruta aérea?

Reproduce el video desde ::55 y sigue la transcripción0:55

Para ilustrar el uso de variables binarias, utilizaremos como contexto una

empresa de consultoría que debe conformar grupos de trabajo para sus proyectos.

Reproduce el video desde :1:5 y sigue la transcripción1:05

La consultora tiene un proyecto para el cual requiere conformar un equipo

altamente calificado.

Cada trabajador tiene unas habilidades específicas y un grado de afinidad con el

proyecto que estima los aportes que podrá hacer al mismo.

Al líder del proyecto se le ha asignado un presupuesto para contratación que no

podrá exceder.

Para garantizar el éxito del proyecto,

el líder desea conformar el equipo con la mayor afinidad al mismo.

Reproduce el video desde :1:29 y sigue la transcripción1:29

Específicamente, para conformar el equipo, el líder del equipo cuenta con Andrea,

Catalina, Daniela, Georgina, Johan y Nicolás.

Quienes tienen habilidades de desarrolladores,

analítica y ciencia de datos.

Sus salarios varían de acuerdo a su grado de experiencia y los aportes potenciales

al proyecto están definidos por su grado de afinidad.

Entre más alto sea el valor de afinidad,

mayor será su contribución al éxito del proyecto.

Reproduce el video desde :1:54 y sigue la transcripción1:54

Para empezar, identifiquemos la información con la que contamos,

clasificándola en conjuntos y parámetros.

Tenemos un conjunto P de personas disponibles para trabajar en el proyecto.

Un conjunto H de habilidades,

y un conjunto indexado Ph con las personas que tienen la habilidad H.

Reproduce el video desde :2:11 y sigue la transcripción2:11

Como ejemplo, el conjunto P subdesarrollador contiene a Andrea y

Catalina, quienes tienen esta habilidad.

En cuanto a los parámetros tenemos k, el presupuesto para contratación.

Si, el salario de cada persona i E P, y Ai,

la afinidad de la persona i E P con el proyecto.

Reproduce el video desde :2:30 y sigue la transcripción2:30

En cuanto a las variables de decisión, el líder debe decidir si selecciona o no

a cada persona para conformar el equipo de trabajo.

Reproduce el video desde :2:38 y sigue la transcripción2:38

Por la naturaleza dicotómica de estas decisiones, es conveniente representarlas

como variables de decisión binarias, que toman los valores de 1 y 0.

Usualmente, asociamos el valor de 1 con el sí, y el valor de 0 con el no.

Si tomamos a Daniela como ejemplo, podemos asociar una variable binaria XDaniela

que toma el valor de 1 si Daniela es contratada.

Y toma el valor de 0 si no se contrata.

De forma gráfica, lo podemos ver como si la variable se encendiera o se apagara.

Reproduce el video desde :3:8 y sigue la transcripción3:08

De manera general, podemos asociar una variable binaria con cada una de las

personas disponibles, tal y como lo hicimos con Daniela.

De esta forma, definimos la variable binaria Xi,

que tomará el valor de 1 si se escoge la persona i E P, para ser parte del equipo.

Y tomará el valor de 0 en caso contrario.

Reproduce el video desde :3:28 y sigue la transcripción3:28

Para hacer uso de estas variables de forma explícita,

usaremos la primera letra del nombre como elemento del conjunto de personas.

Es decir, la variable asociada con Daniela será Xd y con Nicolás será Xn.

Reproduce el video desde :3:42 y sigue la transcripción3:42

La función objetivo es maximizar la afinidad del equipo con el proyecto, por

lo que sumaremos los aportes individuales de cada una de las personas seleccionadas.

Dado que las variables binarias toman valores de 1 cuando se encienden, podemos

apoyarnos de este hecho para cuantificar el aporte de cada persona al proyecto.

Sumamos el aporte de Andrea multiplicando por su variable Xa correspondiente.

También sumamos el aporte de Catalina, multiplicando por Xc, y así sucesivamente.

Las personas seleccionadas tendrán su variable Xi

en 1 y sumarán su aporte al proyecto.

Mientras que las personas que no se seleccionen tendrán su variable Xi en 0 y

no contribuirán.

De forma general, maximizamos la suma sobre todo i E P de Ai por Xi.

Para ilustrar, asumamos que Daniela y Georgina son seleccionadas.

De esta forma, sus variables tomarán el valor de 1 y sus aportes de 9 y 8 se

sumarán, obteniendo un valor de aporte al equipo de 17.

Todas las demás personas tendrán sus variables en 0 y sus

aportes no serán tenidos en cuenta como contribución al equipo.

Reproduce el video desde :4:50 y sigue la transcripción4:50

En cuando a las restricciones,

debemos considerar el límite de presupuesto para conformar el equipo.

Para cuantificar el total de salarios que debemos pagar,

sumamos sobre todas las personas su salario Si por la variable binaria Xi.

De esta forma,

solo sumaremos los salarios de aquellas personas que seleccionemos para el equipo.

Reproduce el video desde :5:9 y sigue la transcripción5:09

Los que no seleccionemos tendrán su variable Xi en 0,

y su salario no será sumado.

Reproduce el video desde :5:16 y sigue la transcripción5:16

Tomando el mismo ejemplo como caso base,

ilustraremos ahora cómo podemos incluir condiciones lógicas en modelos

de optimización haciendo uso de las variables binarias.

Reproduce el video desde :5:26 y sigue la transcripción5:26

El líder de proyecto considera que es necesario que el equipo cuente con por lo

menos dos científicos de datos.

Como las personas que tienen esta habilidad son Georgina, Johan y Nicolás,

debemos garantizar que al menos dos de ellos hagan parte del equipo.

Esto lo podemos garantizar sumando sobre las variables binarias asociadas

con Georgina, Johan y Nicolás.

Y forzando que su suma sea 2 o más.

Esto obligará a que al menos dos de estas variables tomen el valor de 1 y

que por lo menos dos de ellos sean seleccionados en el equipo.

Reproduce el video desde :5:56 y sigue la transcripción5:56

De forma general, podemos sumas los Xi sobre el conjunto indexado Pc,

que contiene a todos los científicos de datos.

Reproduce el video desde :6:5 y sigue la transcripción6:05

Ahora, el líder del proyecto considera que el equipo solo puede tener un

desarrollador.

En este caso, tendremos que limitar el número de personas a contratar del

conjunto de desarrolladores.

Entonces, tendremos que escoger a Andrea a Catalina o a ninguna de las dos.

Reproduce el video desde :6:21 y sigue la transcripción6:21

Apoyándonos en las variables binarias Xa y Xc que representan la contratación de

Andrea y Catalina,

podemos escribir una expresión que limite su suma a no exceder 1.

Reproduce el video desde :6:32 y sigue la transcripción6:32

De esta forma, tenemos cuatro casos dados por los dos valores posibles

que puede tomar Xa y los dos valores que puede tomar Xc.

Si listamos estas cuatro combinaciones, la restricción Xa + Xc ≤ 1,

deberá permitir los casos válidos y filtrar los casos no válidos.

En el primer caso, se contrata a Andrea, pero no a Catalina, lo cual es válido.

La restricción nos señala que si las variables toman los valores de Xa en 1

y Xc en 0, su suma será 1 y no se excederá el límite de 1.

En el segundo caso, no se contrata a Andrea pero sí a Catalina,

lo cual también es válido.

La restricción se cumple porque 1 ≤ 1.

En el tercer caso, ni Andrea ni Catalina se contratan,

lo cual cumple la restricción.

En este caso, no se contratan desarrolladores.

La restricción se cumple porque 0 ≤ 1.

Finalmente, en el cuarto caso,

se considera que Andrea y Catalina se contratan.

Sin embargo, la restricción no lo permitirá,

porque esto implica que 2 ≤ 1, lo cual es falso.

Por lo tanto,

la restricción impide que las variables Xa y Xc tomen el valor de 1 simultáneamente.

De forma general, la restricción la podemos escribir como la

suma de los Xi sobre el conjunto de desarrolladores debe ser ≤ 1.

Un caso de restricciones lógicas de especial importancia es el

modelamiento de implicaciones.

Por cuestiones de dinámica de trabajo, el líder del proyecto considera que si Johan

conforma el equipo, entonces Daniela deberá ser contratada.

En lógica, esta condición genera una implicación.

La restricción Xj ≤ Xd modela esta implicación lógica.

Veamos los cuatro casos posibles.

En el primer caso, Johan se contrata y Daniela también,

lo cual es un caso válido que la restricción permite.

En el segundo caso, Johan se contrata, pero Daniela no,

lo cual es precisamente lo que queremos evitar.

Como 1 no es ≤ 0, este caso es filtrado por la restricción.

En el tercer caso, Johan no se contrata, pero Daniela sí.

La restricción lo permite.

Este caso a veces causa confusión,

porque se piensa que si Daniela fue contratada entonces Johan debió serlo.

Pero si vemos con cuidado,

es la contratación de Johan la que obliga a que Daniela sea contratada.

En esa misma línea, el cuarto caso también es válido,

you que ni Johan ni Daniela se contratan.

Reproduce el video desde :9:2 y sigue la transcripción9:02

Ahora, el líder del proyecto considera que si Johan es contratado,

debemos contratar a Nicolás o a Andrea.

Como Johan, Nicolás y Andrea tienen la posibilidad de ser o no contratados,

esto genera ocho casos posibles.

Los tres primeros casos en los que Johan es contratado se cumple

con que Nicolás o Andrea, o los dos, son contratados.

Todos estos casos válidos, y la restricción los permite.

En el cuarto caso, Johan se contrata, pero Nicolás ni Andrea son contratados.

Este caso no es aceptable y es filtrado por la restricción.

En los últimos cuatro casos, como Johan no es contratado, podemos contratar,

o no, a Nicolás y Andrea.

Es decir, como la primera parte de la implicación no se cumple,

los valores Xn y Xa pueden tomar cualquier valor.

La restricción así lo permite.

Reproduce el video desde :9:52 y sigue la transcripción9:52

En la segunda a parte de este video, presentaremos otras técnicas

de modelamiento basadas en las variables binarias.

A simple vista, son situaciones que se presentan como problemas no lineales.

Pero gracias al poder de las

variables binarias,

las podemos linealizar.

[MUSIC]

# Modelamiento con variables binarias (parte 2)

Guardar nota

[Modelamiento con variables binarias (parte 2) | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/3TpC5/modelamiento-con-variables-binarias-parte-2)

Hay modelos que requieren multiplicar varias variables binarias para

capturar efectos cruzados como sinergias o complementariedad.

En general, esto permite capturar efectos no lineales en nuestros modelos.

Ilustraremos este efecto en nuestro ejemplo de conformación de

equipos y presentaremos un truco para linealizarlo.

Asumamos ahora que el líder del proyecto ha identificado

una sinergia entre Andrea y Johan cuando trabajan en equipo.

Ha estimado que si los dos son seleccionados,

además de soporte de afinidad individual,

se suma un aporte de Delta unidades adicionales.

Bajo esta nueva situación,

podríamos alterar la función objetivo añadiendo un término que capture

la sinergia de Delta unidades si Johan y Andrea son contratados.

Cuando añadimos este nuevo término de sinergia al objetivo,

se sumará Delta solo cuando x\_A y x\_J toman el valor de uno,

es decir, cuando Andrea y Johan se contratan.

Sin embargo, el multiplicar variables genera una

no linealidad que viola los supuestos de la optimización lineal.

Al hacerlo, no podríamos hacer uso del software de

optimización lineal y de sus ventajas computacionales.

Afortunadamente, existe un truco que nos permite linealizar esta expresión no lineal.

Lo que hacemos es definir una

nueva variable binaria y que tomará el valor de

1 cuando Andrea y Johan sean seleccionados, es decir,

cuando x\_A y x\_J tomen el valor de 1,

la variable y tomará el valor de 0 en cualquier otro caso,

como lo muestra la tabla.

Así, podríamos reemplazar el término no lineal por la multiplicación de Delta,

por la nueva variable y. Esta nueva expresión es lineal,

ya que multiplica el parámetro Delta por la variable y,

la multiplicación de variables ha desaparecido.

Para que esta linealización funcione,

es necesario imponer restricciones para que se den los cuatro casos de la tabla.

Para articular los valores que pueden tomar las variables x\_A, x\_J y y,

debemos decirle al modelo que si hay sinergia,

entonces Johan y Andrea son contratados.

Esta implicación la podemos modelar con la restricción 2y menor o igual a x\_J más x\_A.

Miremos los ocho casos posibles generados por

las combinaciones de los valores de esas tres variables.

En el primer caso, las tres variables toman el valor de 1,

es decir, hay sinergia y se contrata a Johan y Andrea.

La restricción lo permite.

En los tres casos siguientes,

la variable y toma el valor de 1,

indicando que hay sinergia, pero,

o Johan o Andrea,

o los dos no son contratados.

De forma correcta, la restricción filtra esos tres casos.

Los tres últimos casos muestran que no hay sinergia y,

efectivamente, o Johan o Andrea,

o los dos no son contratados.

La restricción de forma correcta deja pasar esos tres casos.

Finalmente, el quinto caso es un poco problemático.

La variable de sinergia y toma el valor de 0,

pero tanto Johan como Andrea se contratan.

Esta restricción permite ese caso,

pero esa combinación la debemos filtrar.

Para esto, es necesario imponer otra restricción.

Para filtrar este quinto caso,

debemos pedirle al modelo que si Johan y Andrea son contratados, la sinergia ocurrirá.

Añadiendo la nueva restricción y mayor o igual a x\_A más x\_J menos 1,

podemos filtrar el quinto caso,

que era problemático, pero permitiendo todos los demás.

Como las dos restricciones se deben cumplir simultáneamente,

solo con que se incumpla una bastará para filtrar

la combinación de valores de x\_A, x\_J y y.

En la tabla, resaltamos en color rojo cuando una

restricción restringe una combinación de valores,

y notamos en color verde cuando los permite.

En síntesis, después de imponer este par de restricciones a nuestro modelo,

hemos logrado modelar linealmente esta interacción entre variables binarias.

Al final, solo cuando Johan y Andrea son contratados,

existirá sinergia, la cual podemos contabilizar en nuestro objetivo.

Existe una variedad de modelos en los que las variables pueden tomar valor,

siempre y cuando se cumpla una condición.

Veamos este truco en el contexto de nuestro problema de selección de personal.

Consideremos ahora la situación en que el líder del proyecto debe, también,

decidir cuántas horas de trabajo le asignará a cada una de las personas del equipo.

Además, si la persona es contratada,

tendremos que asignarle un mínimo de 10 horas,

y un máximo de 60 horas de trabajo.

Para modelar esta situación,

creamos una nueva variable de decisión z\_i,

que se define como el

número de horas asignadas a la persona i en P. Esta variable puede ser continua,

ya que las horas son divisibles.

Para modelar esta situación,

debemos considerar que solo aquellas personas que

decidimos contratar, tendrán horas asignadas.

Así, nuestra primera restricción dice que para toda persona i en P,

el número de horas asignadas z\_i debe ser menor o igual al máximo de horas,

que en este caso es 60,

por la variable binaria x\_i.

La segunda restricción dice que para toda persona i en P,

el número de horas asignadas z\_i debe ser por lo menos,

el mínimo de horas,

que en este caso es 10, por la variable binaria x\_i,

como x\_i toma solo dos casos posibles,

podemos analizarlos por separado.

Cuando x\_i toma el valor de 1,

la persona es contratada,

y el máximo de horas que le podemos asignar es de 60,

ya que la primera restricción queda z\_i menor o igual a 60.

De forma similar, la segunda restricción quedará z\_i mayor o igual a 10.

Como las dos restricciones ocurren simultáneamente,

esto implica que el número de horas asignadas deberá estar entre 10 y 60.

Por el otro lado, cuando x\_i toma el valor de 0,

la persona no se contrata,

y el máximo número de horas asignadas será de 0,

ya que la primera restricción impone que z\_i debe ser menor o igual a 0.

La segunda restricción quedará z\_i mayor o igual a 0.

Combinando las dos restricciones, en este caso,

decidimos que cuando la persona no es contratada,

el número de horas z\_i debe ser 0.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

En este video vimos cómo existe una gran variedad de

situaciones en las que necesitamos capturar decisiones del tipo sí o no.

Las variables binarias nos permiten fácilmente

incluir condiciones lógicas en nuestro modelo.

Las variables binarias permiten capturar efectos cruzados,

interacciones entre variables de forma lineal.

Existe una variedad de modelos que requieren activar variables

si alguna condición se cumple.

Para esto, las variables binarias son extremadamente útiles.

El uso de las variables binarias aumenta nuestro repertorio de modelamiento.

Son muy flexibles y nos permiten modelar muchas situaciones,

incluyendo algunas que aparentemente son no lineales.

Sin embargo, el uso de estas variables de naturaleza

discreta tiene un cost

o computacional que será tema de otro video.

# Solución de problemas con variables discretas: Conceptos

[Solución de problemas con variables discretas: Conceptos | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/JgfFc/solucion-de-problemas-con-variables-discretas-conceptos)

Hola. Bienvenidos a este video sobre la solución de problemas con variables discretas.

El supuesto de divisibilidad de la optimización lineal

establece que las variables de decisión pueden tomar valores continuos.

Es decir, no hay garantías que

al resolver un modelo de optimización se obtengan valores enteros.

Si necesitamos que las variables de decisión tomen valores enteros,

debemos hacer un esfuerzo computacional adicional.

Aunque las variables continuas nos permiten modelar muchas situaciones,

las variables binarias y enteras amplían el espectro de

problemas que no son posibles de resolver mediante la optimización lineal.

Al relajar el supuesto de divisibilidad detrás de las variables continuas,

damos paso a variables binarias que toman los valores de cero o

uno y a las variables enteras que toman los valores discretos de cero,

uno, dos y así, sucesivamente.

Las variables binarias nos permiten

modelar situaciones donde se deben tomar decisiones sí o no,

cómo decidir si se invierte o no en un proyecto.

Por otra parte, las variables enteras nos ayudan

a representar decisiones en las que tenemos objetos indivisibles.

Por ejemplo, el número de trabajadores o el número de camiones a adquirir.

Cuando los modelos lineales tienen variables binarias o enteras,

decimos que el problema es un modelo de optimización lineal entera.

Cuando tenemos variables binarias, enteras y continuas,

estamos en el dominio de la optimización lineal entera, mixta.

Cuando formulamos modelos con variables discretas es importante entender que,

al hacerlo, estamos aumentando

significativamente la complejidad del problema y del método de solución.

Parece un cambio menor el definir una variable como entera en vez de continua,

pero realmente no lo es.

Para entender estas implicaciones,

miremos qué pasaría si redondeamos una solución fraccional a sus enteros más cercanos,

algo que parece fácil e intuitivo.

Consideremos este problema de optimización lineal entera,

que tiene como variables de decisión discretas a x\_1 y a x\_2.

Algo que parece natural para resolver este tipo de problemas es optimizar

ignorando las restricciones de integralidad y luego redondear a los enteros más cercanos.

Veamos en este ejemplo, qué pasaría.

Gráficamente. Estas tres restricciones nos definen

el espacio de factibilidad dado por la región en púrpura.

Si ignoramos la integralidad de las variables x\_1 y x\_2,

este espacio púrpura es el espacio relajado en el que

permitimos tomar valores continuos a x\_1 y x\_2.

Como las variables x\_1 y x\_2 deben tomar valores enteros,

el conjunto de puntos factibles es el conjunto discreto de puntos rojos.

Este es el espacio de factibilidad del modelo de optimización entera.

Notemos cómo la región púrpura del

espacio relajado contiene a los puntos discretos rojos.

Ahora, optimizaremos en el espacio continuo

púrpura para luego redondear la solución que encontremos.

Para hacerlo, nos debemos mover en la dirección de optimización de la función objetivo,

dada por el vector gradiente en rojo.

Al optimizar en esta dirección,

encontramos que la solución óptima del problema

relajado es el punto marcado con un rectángulo en verde.

Como su primera componente es 2,85, redondearíamos a 3.

Sin embargo, el punto con coordenadas 3,

3 no es factible,

ya que no satisface todas las restricciones.

De forma sorprendente, la solución óptima entera es el punto con coordenadas 2,

1 marcado con un rectángulo en rojo, es decir,

muy lejano de la solución óptima,

de la relajación y de la redondeada.

Con este ejemplo, ilustramos como el redondeo,

aunque natural, no es fácil hacerlo

ni garantiza encontrar la mejor solución del problema.

Dado que las variables discretas toman valores finitos,

uno podría estar tentado a enumerar las soluciones y escoger entre todas la mejor.

Asumamos que hemos modelado un problema que tiene 10 variables binarias, x\_1 hasta x\_10.

Para resolver el problema por enumeración exhaustiva,

debemos evaluar la función objetivo para cada una de las soluciones factibles.

Dejando de lado las restricciones,

una posible solución para este problema es una combinación de ceros y unos.

Por ejemplo, esa combinación de tres ceros, dos unos,

cero, dos unos y dos ceros,

sería una solución posible.

Para contar el número total de soluciones o combinaciones de ceros y unos,

vemos que la primera variable puede tomar dos valores: cero o uno.

La segunda variable también puede tomar estos dos

valores y así sucesivamente hasta la décima variable.

Por tal razón, vemos que el número total de soluciones es 2 por 2 por 2,

10 veces, el total de soluciones es 1.024.

Aunque este es un número de soluciones considerable,

teniendo tan solo diez variables,

seguramente un computador moderno no tenga problemas evaluando todas esas soluciones.

Pero si consideramos que ahora tenemos n variables,

la cantidad de soluciones será 2 a la n y ese número parece crecer rápidamente.

Para ilustrar, si tuviéramos 40 variables binarias,

el número de soluciones sería del orden de 2 a la 40,

que es aproximadamente 1,1 millones de millones.

Si un computador tomará un milisegundo evaluando cada solución,

le tomaría aproximadamente unos 35 años en probar todas las soluciones.

Pero los problemas prácticos tienen muchas más variables,

a veces del orden de cientos,

miles o quizás millones.

Por esta razón, explorar exhaustivamente el espacio de solución es simplemente inviable.

Algo similar pasa con las variables enteras.

Si consideramos un problema con variables enteras que

pueden tomar los valores discretos entre el 0 y el 9,

habría 10 posibles valores para cada variable,

lo que significa que un problema con tan solo 10 variables

tendría del orden de 10 a la 10 posibles soluciones.

Esto es 10.000 millones de soluciones.

A esa característica de crecimiento exponencial de

soluciones en los problemas binarios enteros se le llama

explosión combinatoria y es una

clara advertencia para no usar el método exhaustivo como algoritmo de solución.

Hay muchas formas posibles de formular un modelo de optimización.

En optimización entera, es particularmente importante reconocer que hay

unas formulaciones mejores que otras

y que esto tiene un impacto en el tiempo computacional.

Consideremos esa formulación con restricciones naranja que

atrapa los puntos enteros rojos, la llamaremos p1x.

El espacio de solución relajado está dado por la región de color naranja.

Al resolver el modelo de optimización lineal sobre el espacio relajado,

obtenemos la solución fraccional enmarcada por el rectángulo verde.

Los métodos de solución de optimización entera parten de este punto

fraccional para encontrar la mejor solución entera de forma iterativa.

En general, entre más área fraccional haya,

más iteraciones tendrán que hacer para encontrar el mejor punto entero rojo.

Una segunda formulación está dada

por las restricciones de color azul que enmarcan el espacio continuo azul.

A esta formulación la llamaremos p2x.

Tanto la formulación anterior como esta contienen las mismas soluciones enteras rojas.

En ese sentido, podemos decir que las dos son formulaciones válidas,

ya que atrapan los mismos puntos factibles rojos cuando imponemos la integralidad.

Sin embargo, la segunda formulación es más fuerte que la primera,

ya que está contenida en ella.

Es decir, el espacio de solución relajado de la

formulación azul está contenido dentro del espacio naranja.

Cuando resolvemos el modelo de optimización lineal sobre el espacio continuo azul,

el punto óptimo fraccional está más cerca a los puntos factibles rojos.

Por lo tanto, podemos esperar hacer menos iteraciones

con la formulación azul cuando intentamos encontrar la mejor solución entera.

Finalmente, esa formulación con recepciones de color púrpura

atrapa los puntos rojos enteros de la forma más apretada posible.

Si resolvemos este problema de optimización lineal sobre el espacio relajado,

sin imponer la integralidad,

encontramos que su punto óptimo tiene componentes enteros.

Esto hace a esa formulación muy especial.

A esa formulación la llamamos "el casco convexo".

Poniendo todo junto, la formulación del caso convexo es la mejor formulación posible.

Su espacio está contenido en

el espacio de cualquier otra formulación que podamos plantear.

En general, no es siempre posible tener la formulación que representa el casco convexo.

A veces, se requiere de un número exponencial de restricciones

para definirlo o simplemente,

lo desconocemos parcial o totalmente.

Sin embargo, esto nos muestra un principio

importante en el modelamiento de problemas de optimización entera.

Entre más y mejores restricciones planteemos,

podemos acercarnos más a esa mejor formulación.

Esto tendrá efectos computacionales importantes.

Entre más apretada sea nuestra formulación,

muy posiblemente el método de solución tarde menos tiempo.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

En este video vimos cómo las variables binarias

y enteras nos permiten ampliar nuestro

espectro para modelar nuevos problemas de optimización.

Es importante entender que hay un costo

computacional al incluir variables discretas en nuestros modelos,

resolver un problema de optimización en un espacio continuo y luego

redondear suele ser insuficiente como estrategia de solución.

Por su naturaleza discreta,

la cantidad de soluciones de un

problema binario o entero suelen tener una explosión combinatoria.

La formulación de nuestro modelo de

optimización tiene un alto impacto en el tiempo de solución.

En un próximo video pondremos en práctica estos conceptos concentrándonos en

un método de solución que nos permite resolver

problemas de optimización entera en la práctica.

# Solución de problemas con variables discretas: Branch & Bound

[Solución de problemas con variables discretas: Branch & Bound | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/YTRIS/solucion-de-problemas-con-variables-discretas-branch-bound)

Hola.

Bienvenidos a este video sobre la solución de problemas con variables discretas.

Donde nos enfocaremos en el método de solución.

Ahora que conocemos la dificultad que conlleva incluir variables discretas en

nuestros modelos.

Es momento de hablar de un algoritmo utilizado para encontrar soluciones

discretas.

A través de resolver iterativamente modelos de optimización lineal,

con variables continuas.

Este método se conoce en el mundo de la optimización como Branch and Bound.

Y se puede traducir como ramificación y acotamiento.

La lógica detrás de este algoritmo sigue el principio de divide y vencerás,

que se usa en la computación como estrategia de solución.

Supongamos que tenemos un espacio de soluciones S.

Y nuestro interés es encontrar la mejor solución global entera z estrella,

en un problema de maximización.

Reproduce el video desde :1:2 y sigue la transcripción1:02

Esta mejor solución se encuentra entre dos cotas, una inferior y otra superior.

A esas cotas globales las llamamos z barra piso y z barra techo.

La cota inferior la podemos ver como una estimación pesimista de la solución

óptima entera.

Usualmente, esta cota la actualizamos con la mejor solución entera que hayamos

encontrado.

En cuanto a la cota superior, es una estimación optimista.

Es una aspiración de la mejor solución entera que podremos encontrar en alguno de

los subespacios aún sin explorar de la partición.

Reproduce el video desde :1:33 y sigue la transcripción1:33

En búsqueda de z estrella, la intuición detrás de Branch and Bound consiste en

particionar el espacio S de soluciones y enumerar implícitamente este espacio.

Apoyándonos en la exploración e información de cada uno de

los pequeños espacios que conforman la partición.

A medida que el método progresa, la información de las cotas globales van

mejorando, volviéndose cada vez más realistas.

En cada uno de los espacios pequeños,

resolvemos problemas de optimización lineal continua.

En cada subespacio, tenemos cotas pesimistas y optimistas sobre la solución

entera que podemos encontrar.

A diferencia de las cotas globales,

estas cotas son locales a los subespacios de la partición.

La forma como exploramos el espacio S nos permite ir descartando los subespacios

a través de podas.

Existen tres tipos de podas.

Es posible que al explorar un subespacio encontremos su mejor solución entera.

Este primer tipo de poda la llamamos poda por optimalidad.

También es posible que, al intentar encontrar una solución entera dentro de un

subespacio, nos encontremos que no hay soluciones.

Este segundo tipo de poda la llamamos poda por infactibilidad.

Finalmente, es posible podar un subespacio cuando su promesa ni siquiera podrá

mejorar la solución que tenemos a la mano.

Para ilustrar, consideremos que la cota superior del espacio S5 no será mayor

a la solución global que you tenemos a la mano en z barra piso.

Por esta razón, podemos eliminar este subespacio,

you que tenemos certeza que el óptimo global allí no estará.

Cuando exploramos un espacio, como el S4,

es posible que encontremos una solución fraccional.

En este caso, lo que hacemos es particionar de nuevo,

intentando eliminar partes de las soluciones que no nos interesan.

Sin eliminar soluciones factibles.

Ese proceso lo llamamos ramificación o branching.

Reproduce el video desde :3:18 y sigue la transcripción3:18

Lo que nos permite Branch and

Bound es una exploración sistemática del espacio de solución.

Y apoyarnos en la información global y local para ir podando espacios donde

sabemos que la solución no estará.

Al final, el método nos garantizará encontrar la mejor solución entera.

Reproduce el video desde :3:35 y sigue la transcripción3:35

Algo que es muy valioso del método de Branch and Bound es que es posible saber

qué tan buena es la solución que tenemos a la mano.

Si el proceso de solución nos está tomando mucho tiempo,

el concepto de brecha o gap nos permitirá abortar el proceso sin temores.

Reproduce el video desde :3:50 y sigue la transcripción3:50

A medida que el algoritmo de Branch and Bound progresa,

vamos llevando registro de su cota pesimista y optimista globales.

Podemos interpretar la diferencia relativa entre estas dos cotas como la distancia

que hay entre las solución factible, que you tenemos a la mano.

Y la mejor solución que podríamos llegar a encontrar.

A esto se le llama brecha de optimalidad, o gap en inglés.

Por ejemplo, supongamos que estamos solucionando un problema de optimización

entera de maximización.

En un punto intermedio del proceso de solución con Branch and Bound,

tenemos que la cota optimista es 100 y la cota pesimista es 90.

El gap calculado para este ejemplo será del 10%.

Entonces, podemos decir que la solución entera factible que tenemos hasta este

punto es a lo sumo sólo 10% peor.

Que la mejor solución que podríamos llegar a obtener al final del algoritmo.

Si eso nos parece aceptable,

podemos parar el algoritmo y ahorrarnos tiempo de solución.

Reproduce el video desde :4:47 y sigue la transcripción4:47

Cabe resaltar que la cota optimista es sólo una promesa.

Por lo que no hay garantía de que la solución vaya a ser mejor que la de 90,

que you tenemos a la mano.

Sin embargo, en el peor de los casos, la solución de 90 estará, a lo sumo,

10% distante de esa mejor solución, si llegara a existir.

Reproduce el video desde :5:5 y sigue la transcripción5:05

Ahora, miremos algunas consideraciones prácticas de estos conceptos de Branch

and Bound.

Reproduce el video desde :5:11 y sigue la transcripción5:11

En la práctica, Branch and Bound suele encontrar soluciones factibles de buena

calidad para problemas de optimización discreta, en tiempos razonables.

Sin embargo, no podemos perder de vista que, para resolver un problema discreto,

debemos resolver muchos problemas continuos de optimización.

Esta es la razón por la cual los problemas enteros siempre tomarán mayor tiempo en

resolver que sus equivalentes continuos.

Al modelar, debemos ser cuidadosos en escoger la naturaleza de nuestras

variables, y justificar si deben ser discretas o continuas.

Afortunadamente, el software de optimización lineal tiene este algoritmo

implementado para calcular soluciones a problemas enteros, binarios y mixtos.

Nos permiten además configurarlo para que el proceso de solución sea mucho más

efectivo.

Reproduce el video desde :5:56 y sigue la transcripción5:56

Al correr problemas de gran escala, con muchas variables y restricciones.

Notaremos la diferencia en los tiempos de corrida entre los problemas con variables

continuas y aquellos que tienen variables discretas.

Los optimizadores comerciales suelen usar métodos adicionales de aceleración de

este algoritmo.

Que presentan ventajas sobre los libres o de código abierto.

Sin embargo, con los conceptos que hemos visto,

podremos sacarle la máxima ventaja a los optimizadores libres.

Y resolver problemas muy retadores.

Reproduce el video desde :6:24 y sigue la transcripción6:24

A través del concepto de gap,

podemos definir un criterio de parada para el algoritmo de Branch and Bound.

Reproduce el video desde :6:29 y sigue la transcripción6:29

En muchas aplicaciones,

el optimizador puede tomar un tiempo reducido de pocos segundos o minutos.

En encontrar una solución con un gap menor a 1%.

Reproduce el video desde :6:39 y sigue la transcripción6:39

Luego, puede tardar minutos u horas en cerrar esta brecha.

O inclusive en probar que la solución que tiene a la mano es la solución óptima.

Dado que los optimizadores nos permiten establecer el gap máximo que estamos

dispuestos a tolerar.

Esto nos permitirá detener el algoritmo y ahorrarnos un tiempo importante.

Es un consejo práctico que vale la pena aplicar.

Reproduce el video desde :7: y sigue la transcripción7:00

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

Reproduce el video desde :7:4 y sigue la transcripción7:04

En este video, vimos como Branch and

Bound es un algoritmo que nos permite utilizar la optimización lineal continua.

Para encontrar soluciones binarias o enteras eficientemente.

A través del gap o brecha de optimalidad, el método de Branch and

Bound nos permite cuantificar la calidad de la solución que tenemos.

Los optimizadores you tienen Branch and Bound implementado,

y nos permiten configurarlo.

Al usar el gap como criterio de parada,

podemos evitar tiempos de corrida excesivamente altos.

Reproduce el video desde :7:31 y sigue la transcripción7:31

Muchos de los modelos que nos encontramos en la práctica tienen variables discretas.

Al poner en práctica estos conceptos y consejos prácticos, seremos más efectivos

al modelar y resolver problemas de optimización enteros.

Y nos ahorraremos mucho tiempo y esfuerzo.

[MUSIC]

SEMANA 4

# Video: Restricciones de inventario: Casos de aplicación

[Video: Restricciones de inventario: Casos de aplicación | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/BEjMV/video-restricciones-de-inventario-casos-de-aplicacion)

[MUSIC]

Reproduce el video desde ::19 y sigue la transcripción0:19

Hola, bienvenidos a este video sobre restricciones de inventario.

Una estructura muy común presente en muchos modelos de optimización.

Reproduce el video desde ::28 y sigue la transcripción0:28

Empecemos mirando tres ejemplos en los que aparecen naturalamente

las restricciones de inventario.

Reproduce el video desde ::34 y sigue la transcripción0:34

En toda organización, es necesario contar con procesos de planeación de personal.

Que permitan tener el recurso humano idóneo a través del tiempo.

En particular,

en las fuerzas militares y otras estructuras organizacionales jerárquicas.

Es necesarios planear cuidadosamente el entrenamiento del personal.

Para poder contar con el personal indicado en el momento justo.

Por ejemplo, cuando las armadas de los países adquieren nuevos navíos.

Es necesario reclutar y capacitar al personal con bastante anticipación a su

entrada en operación.

Cuando el navío opere años en el futuro,

las decisiones que se tomaron hoy serán las responsables del éxito mañana.

Reproduce el video desde :1:11 y sigue la transcripción1:11

Este esquema ilustra gráficamente el proceso de planeación de personal a lo

largo del tiempo.

Los cuadros de colores indican los diferentes rangos del personal.

Y al interior de cada color, sus grados o antigüedad,

en este caso tres por cada rango.

En las escuelas de formación, es necesario decidir cuánto nuevo personal se tendrá

que reclutar durante el horizonte de planeación.

Estas entradas de personal alimentan el primer grado del primer rango.

Con nuevos ingresos rotulados con la letra R de reclutamiento.

Como datos históricos, se cuenta con las tasas de ascenso históricas.

Es así como el personal puede ir avanzando entre grados y rangos.

Esto lo rotulamos en nuestro esquema con la letra A de ascensos.

Con la tasa histórica de retiros,

se puede ir descontando el personal que sale de la organización.

Estas salidas las rotulamos con E y NE,

denotando los retiros esperados y los no esperados.

Además, el modelo de planeación de personal cuenta con parámetros como la

capacidad de las escuelas de formación.

Y el requerimiento de personal por rango en cada período de tiempo.

Así será posible llevar una contabilidad detallada de las entradas de personal,

como los reclutamientos y los ascensos.

Y de las salidas de personal,

como los retiros, para tomar las acciones de reclutamiento apropiadas.

Esta prescripción de acciones será exitosa mientras podamos cumplir con la demanda

de personal a través de los años.

Todo esto es posible llevando un inventario detallado del personal dentro

de nuestro modelo de optimización.

Reproduce el video desde :2:44 y sigue la transcripción2:44

Un segundo ejemplo tiene que ver con una empresa que necesita financiar un proyecto

de renovación de su infraestructura.

Y para eso, está considerando bonos con diferentes tiempos de maduración en el

horizonte del proyecto.

Estos bonos requieren diferentes niveles de inversión,

y generan flujo de caja en diferentes momentos del tiempo del proyecto.

Reproduce el video desde :3:5 y sigue la transcripción3:05

Esquemáticamente, podemos ver cómo opera el plan de

financiación del proyecto de renovación.

Reproduce el video desde :3:11 y sigue la transcripción3:11

En el período cero,

se toman las decisiones de los bonos a adquirir y sus montos de inversión.

Esto lo denotamos con la flecha verde rotulada Inversión (0).

Luego, en el período t de la planeación,

debemos hacer un inventario del dinero con el que contamos.

En particular del período anterior,

nos llega lo que tengamos en caja más sus intereses.

A este flujo de dinero lo denotamos con la flecha púrpura rotulada Caja (t-1).

También nos ingresan los dividendos de los bonos, y los que hayan madurado.

Este ingreso los llamamos Bonos (t) y lo notamos con la flecha amarilla.

Finalmente, todo este dinero deberá ser suficiente para cumplir con las

obligaciones del proyecto.

Denotado por la flecha naranja rotulada Proyecto (t).

El balance de dinero que tengamos al final del Periodo (t) quedará en caja o en

bancos, y ganará algo de interés.

Ese flujo lo denotamos con la flecha púrpura rotulada Caja (t),

y será entrada para el período t + 1.

Este proceso de balance de inventario se hace en cada período sucesivamente a lo

largo del horizonte de planeación.

En un modelo de optimización,

es posible incluir estas restricciones de inventario de dinero.

Para poder así hacer una planeación financiera de las inversiones.

Reproduce el video desde :4:26 y sigue la transcripción4:26

Un tercer ejemplo está basado en la generación de energía hidroeléctrica.

En este contexto, el agua proveniente de las fuentes hídricas y la lluvia es

almacenada en embalses o represas.

Esta agua es utilizada para satisfacer demanda de

consumo humano o agrícola a través de vertimientos.

Y también para generar energía al hacer pasar el agua a través de las turbinas.

El agua que se vierta o pase por la turbina baja el nivel del embalse.

Reproduce el video desde :4:53 y sigue la transcripción4:53

Esquemáticamente, podemos representar esta situación de la siguiente manera,

haciendo un balance de inventario de agua.

Reproduce el video desde :5: y sigue la transcripción5:00

El agua con la que cuenta la hidroeléctrica en el período t.

Es el agua que quedó en el embalse en el período t-1, denotada por la flecha azul,

horizontal, rotulada Et-1.

A esta agua se le suma la lluvia del período que denotamos por lluvia t,

con otra flecha azul vertical.

Reproduce el video desde :5:19 y sigue la transcripción5:19

Todas estas flechas azules son entradas de agua.

Las decisiones que toma la hidroeléctica en el período son los vertimientos

para satisfacer la demanda humana.

La regulación agrícola y, dado el caso,

cuando la capacidad del embalse es excedida.

Estos vertimientos los denotamos con flechas verdes verticales.

También, la hidroeléctrica puede tomar la decisión de hacer pasar el agua por las

turbinas para generar energía eléctrica.

Y así poder cumplir con la demanda del sector y sus contratos.

Reproduce el video desde :5:50 y sigue la transcripción5:50

Esta generación de energía la denotamos con flechas amarillas.

Finalmente, el agua que queda continuará embalsada y pasará al siguiente pedido.

En un modelo de optimización,

es posible capturar esta dinámica de la generación de energía hidroeléctrica.

Por medio de restricciones de inventario.

Así será posible cumplir los contratos y compromisos a mediano y largo plazo,

haciendo un uso sostenible de las fuentes hídricas.

En la siguiente parte de este video,

ilustraremos el uso de estas restricciones en un modelo de optimización.

[MUSIC]

# Restricciones de inventario: Modelamiento

[Restricciones de inventario: Modelamiento | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/wRvRi/restricciones-de-inventario-modelamiento)

Hola, bienvenidos a este video sobre restricciones de inventario.

En el video anterior, mostramos algunos casos prácticos donde aparece esta

estructura común de modelamiento.

Reproduce el video desde ::31 y sigue la transcripción0:31

En este video, ilustraremos el uso de estas restricciones con un ejemplo en el

contexto de una cervecería.

Reproduce el video desde ::38 y sigue la transcripción0:38

En una cervercería artesanal se produce cerveza diariamente para la venta al

público.

Reproduce el video desde ::44 y sigue la transcripción0:44

Se han estimado las demandas en litros promedio para los próximos siete días.

Gráficamente, vemos cómo la demanda se incrementa significativamente en el fin de

semana.

Reproduce el video desde ::55 y sigue la transcripción0:55

La cervercería tiene una capacidad de producción diaria de 350 litros por día.

Esta producción diaria no será suficiente para cumplir las demandas del viernes y

el sábado.

Por lo que la cervercería tendrá que suplir parte de esta demanda.

Planeando adecuadamente su producción y manejando sus inventarios.

Reproduce el video desde :1:13 y sigue la transcripción1:13

Al comenzar la semana,

hay 80 litros de cerveza en inventario que provienen de la semana anterior.

Reproduce el video desde :1:19 y sigue la transcripción1:19

El costo de producción se ha calculado en 15 por litro.

Una vez producida, esta cerveza es muy delicada.

Y deben tomarse una serie de acciones para conservarla adecuadamente para el día

siguiente.

Reproduce el video desde :1:32 y sigue la transcripción1:32

Este manejo de la cerveza que pasa de un día a otro se ha calculado en cinco

por litro.

Reproduce el video desde :1:38 y sigue la transcripción1:38

La cervecería necesita determinar cuánta cerveza producir en cada uno de los

días de la semana.

De tal forma que pueda suplir la demanda con su capacidad.

Igualmente, la cervercería requiere hacer un plan.

Que le permita minimizar los costos totales de producción y manejo de

inventarios.

Reproduce el video desde :1:56 y sigue la transcripción1:56

En ese contexto de la cervecería,

tenemos que modelar la dinámica del inventario de la cerveza.

Para entenderlo, miremos un ejemplo numérico.

Consideremos que al comenzar la semana,

contamos con un inventario inicial de 80 litros de cerveza.

Este inventario de cerveza alimenta el inventario del día lunes.

El día lunes asumamos que la cervecería decide producir 350 litros.

Estos litros producidos más el inventario existente se suman para llegar a un total

de 430 litros disponibles.

El lunes, de acuerdo a las proyecciones,

se espera que los clientes demanden 130 litros.

Dejando 330 litros como inventario al final del día para almacenar.

Para el día martes,

contamos con los 330 litros de cerveza que se almacenan al final del día lunes.

Luego, asumamos que la cervercería decide producir 200 litros.

Reproduce el video desde :2:48 y sigue la transcripción2:48

Estos litros producidos el martes se suman al inventario que se traía en lunes,

para llegar a un total de 500 litros.

Como el martes se demandan 180 litros, se restan al inventario existente de

500 para dejar un total de 320 litros al final del día.

Estos pasarán como inventario inicial para el miércoles y así sucesivamente.

[MUSIC]

Ahora el reto es traducir esta dinámica del inventario en

restricciones para el modelo de optimización.

La decisión fundamental en este modelo es cuánto producir de cerveza en cada

período.

Sin embargo, para llevar un registro del inventario diario de cerveza,

es una buena práctica crear variables auxiliares de inventario.

Reproduce el video desde :3:31 y sigue la transcripción3:31

Empezemos modelando el inventario al final del primer día.

Reproduce el video desde :3:35 y sigue la transcripción3:35

Como vimos anteriormente, el inventario al final del primer día.

Corresponde a la suma del inventario inicial y la producción del día,

menos la demanda de cerveza del primer período.

En el caso del primer período, el inventario inicial es de 80 litros,

y es un parámetro dado, no una variable.

Para los períodos siguientes, el inventario al final del período es igual

al inventario inicial que viene del período anterior.

Más la producción del período menos la demanda.

En esta expresión, el inventario inicial es una variable y no un parámetro,

como en el caso del primer período.

Reproduce el video desde :4:9 y sigue la transcripción4:09

Además de contabilizar el inventario, estas restricciones garantizan que las

unidades demandadas provengan de la producción del período.

O de períodos anteriores, almacenadas en el inventario.

[MUSIC]

De forma gráfica, este esquema representa el balance de entradas y salidas de

cerveza para un período T.

Reproduce el video desde :4:28 y sigue la transcripción4:28

Las entradas son los flujos de cerveza provenientes del inventario del período T-

1 y de la producción del período T.

Las salidas son las ventas del período T y el inventario de cerveza que almacenamos

al final del período T.

Y que será el inventario inicial para el próximo período.

Ahora estamos listos para formular nuestro modelo de optimización para la cervecería.

Reproduce el video desde :4:50 y sigue la transcripción4:50

Para empezar, identifiquemos la información con la que contamos,

clasificándola en conjuntos y parámetros.

Tenemos un conjunto T de días de la semana.

Reproduce el video desde :5: y sigue la transcripción5:00

Y en cuanto a los parámetros, tenemos dT, la demanda para cada día T.

K, la capacidad de producción diaria, I0,

el inventario inicial de cerveza al comienzo de la semana.

El costo c de producir un litro de cerveza,

y el costo h de mantener un litro de cerveza en inventario de un día al otro.

Reproduce el video desde :5:20 y sigue la transcripción5:20

En cuanto a las variables de decisión,

la cervecería debe decidir cuántos litros de cerveza debe producir en cada día.

Estas variables las denominamos Xt, y las indexamos en el conjunto t de día.

Reproduce el video desde :5:33 y sigue la transcripción5:33

La cervercería también debe decidir cuántos litros de

cerveza quedarán en inventario al final del día.

Estas variables las denominamos It, para todo día t en T.

Reproduce el video desde :5:45 y sigue la transcripción5:45

En cuanto a las restricciones, lo que produzca la cervecería diariamente no

puede exceder su capacidad de producción diaria.

En cuanto al inventario, es importante expresar por separado la del primer día,

you que utilizamos el parámetro I0 del inventario inicial.

Luego, las recepciones de inventario para los demás días las establecemos de forma

general.

Donde el inventario que viene del día anterior It- 1 es una variable de

decisión.

Reproduce el video desde :6:12 y sigue la transcripción6:12

Finalmente, tenemos las restricciones sobre la naturaleza de las variables.

Que garantizan que la producción y el inventario toman valores continuos mayores

o iguales a cero.

Reproduce el video desde :6:23 y sigue la transcripción6:23

Finalmente, expresamos la función objetivo de la cervecería.

En este caso, la cervecería desea minimizar los costos totales, es decir,

los costos agregados de producción e inventario.

Para esto,

sumamos sobre todos los días el costo de producción C por la cerveza producida Xt.

Y el costo de mantener en inventario H por el total de cerveza al final

de cada día It.

Reproduce el video desde :6:48 y sigue la transcripción6:48

Ahora, exploremos los resultados luego de resolver el modelo de optimización para la

cervecería.

Reproduce el video desde :6:54 y sigue la transcripción6:54

Empecemos por analizar la producción y la demanda.

Esta gráfica nos revela algo interesante.

Podemos ver cómo de martes a jueves se utiliza a tope la capacidad de producción.

A pesar de que la demanda de estos días está muy por debajo de este valor.

Esto se hace para poder tener inventario suficiente para los días viernes y sábado.

Que son los días con más alta demanda de la semana.

Por otra parte, el día domingo you se ha agotado el inventario.

Por lo que se produce justo lo que se necesita para cubrir la demanda

de ese día.

Reproduce el video desde :7:26 y sigue la transcripción7:26

Miremos cómo se comporta el inventario en relación con la producción y la demanda.

Al principio de la semana, a pesar del costo de manterner el inventario.

El modelo recomienda almacenar muchos litros en inventario para prepararse para

la demanda del fin de semana.

Una vez pasa el pico de la demanda del sábado, el inventario se agota.

Puesto que el domingo puede suplirse con su producción diaria,

y así no se incurre en costos de inventario.

Reproduce el video desde :7:52 y sigue la transcripción7:52

Dejando de lado el caso de la cervecería,

quisiera mostrar cómo podemos generalizar las restricciones de inventario.

Para aplicarlas en múltiples contextos,

como los de los casos prácticos que vimos en el video anterior.

Reproduce el video desde :8:6 y sigue la transcripción8:06

Estas restricciones tienen la siguiente estructura.

Tomando un período cualquiera T en el horizonte de planeación.

El inventario al final de un período genérico It es igual al inventario del

período anterior It- 1.

Más todas las entradas de unidades del período Xt,

menos todas las salidas de unidades del período Yt.

Las entradas y salidas de unidades pueden ser una combinación de parámetros

o variables.

Lo importante es identificar qué suma y qué resta al inventario del período T.

Usualmente, debemos tener cuidado con las restricciones de inventario del primero y

el último período.

you que pueden ser ligeramente diferentes.

Por ejemplo, si tenemos un inventario inicial debemos crear una restricción.

Que sume el inventario con el que contamos al inicio de la planeación.

Pero este es usualmente un parámetro, y no debe ser tratado como variable.

Igualmente sucedería si es deseable contar con un inventario al final del período,

como margen de seguridad.

Reproduce el video desde :9:3 y sigue la transcripción9:03

Por último, no debemos olvidar la naturaleza de las variables.

you que dependiendo del problema,

estas pueden ser continuas o enteras según el problema.

Reproduce el video desde :9:13 y sigue la transcripción9:13

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

Reproduce el video desde :9:18 y sigue la transcripción9:18

En este video, vimos cómo las restriciones

de inventario aparecen en la práctica en diversos contextos de planeación.

Los inventarios pueden representar diferentes unidades.

Por ejemplo, personas, dinero, agua, productos y,

como en nuestro ejemplo, litros de cerveza.

Las restricciones de inventario tienen una estructura general.

El inventario al final es el inventario inicial más las entradas,

menos las salidas.

Cada uno de estos términos dependerá del contexto de aplicación.

A través del manejo de inventario podemos sacarle total provecho al poder

prescriptivo de los modelos de optimización.

Al tener una visión completa de todo el horizonte de planeación.

Podemos anticipar acciones que nos permiten identificar las mejores

soluciones.

O a veces soluciones factibles que son difíciles de concebir de otra manera.

[MUSIC]

# Restricciones suaves

[Restricciones suaves | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/jLfSc/restricciones-suaves)

Hola. Bienvenidos a este video sobre restricciones suaves que,

en contraste con las restricciones fuertes,

no estamos obligados a cumplir.

Consideremos tres ejemplos en los que aparecen naturalmente estas restricciones suaves.

En un contexto de producción,

es común imponer restricciones que impiden que se exceda la materia prima disponible.

Aunque es cierto que en bodega haya cierta cantidad de materia prima disponible,

también lo es que sea posible adquirir más materia prima a un costo adicional.

Si en nuestro modelo incorporamos explícitamente esta posibilidad,

decimos que estamos suavizando la restricción de capacidad de materia prima.

Toda organización debe planear su requerimiento de

personal para poder llevar a cabo su misión operacional y proyectos estratégicos.

En este contexto, el número de personas disponibles con las que se cuenta cada día,

puede considerarse como una restricción fuerte.

Sin embargo, esa condición se puede suavizar mediante la contratación de nuevo personal.

Mediante las restricciones suaves,

podemos instruir al modelo de optimización,

que lo ideal es programar al personal ya contratado,

pero que contratar personal adicional es tolerable.

Finalmente, toda ciudad tiene estrategias para atender las emergencias oportunamente.

En ese contexto, se pueden utilizar modelos de optimización para ubicar

unidades de reacción de emergencias que puedan atender las con un alto nivel de servicio.

Por ejemplo, ante emergencias que amenacen la vida,

como las fallas cardiacas,

este nivel de servicio puede ser

atender al 90 por ciento de las llamadas en menos de diez minutos.

Por cuestiones de equidad,

se desea que toda zona de la ciudad quede

igualmente cubierta con estas unidades de reacción.

Sin embargo, esa equidad es muy difícil de lograr y es posible que no se pueda obtener,

por lo que imponerla de forma estricta puede generar una infactibilidad

en el modelo de optimización.

En este caso es preferible suavizar la restricción,

permitiendo que algunas zonas queden mejor cubiertas que otras,

pero dejando claro que esta equidad es lo deseable.

Ilustraremos el concepto de restricciones suaves a

través de un ejemplo de proyectos de inversión.

Consideremos el caso de un banco agrario cuya misión establece su

compromiso con el desarrollo rural y la sostenibilidad ambiental,

y cuenta entre sus grupos de interés a accionistas mayoritarios del sector agropecuario.

El banco desea crear un portafolio de inversión y tiene

a su disposición nueve proyectos que pertenecen a tres sectores de la

economía: agropecuario, construcción e infraestructura.

El banco puede invertir en una fracción de esos proyectos,

compartiendo la inversión y las utilidades proporcionalmente con sus socios.

La evaluación de los proyectos hecha por el banco,

ha determinado que los proyectos dos,

seis y ocho tienen un alto impacto ambiental.

La junta del banco ha aprobado un presupuesto de

3.000 para conformar ese portafolio de inversión.

Aunque no es ideal exceder este presupuesto,

la junta también está abierta a aumentarlo

con recursos provenientes de un fondo especial.

Sin embargo, el presupuesto adicional que se

solicita a este fondo tendrá un interés del 20 por ciento.

Además, el banco debe cumplir con ciertas regulaciones

internas que restringen su inversión y que son de obligatorio cumplimiento.

Por su misión, por lo menos el 50 por ciento de la inversión del portafolio,

debe estar en el sector agropecuario,

y por su compromiso ambiental,

el portafolio puede tener a lo sumo,

el 30 por ciento invertidos en proyectos de alto impacto ambiental.

Si el presupuesto inicial no se pudiese exceder,

diríamos que la restricción de presupuesto es fuerte, es decir,

la inversión en los proyectos debería ser

estrictamente menor o igual al presupuesto inicial.

Pero, en este caso, podemos adquirir presupuesto adicional a un costo financiero,

por lo tanto, decimos que la restricción de presupuesto es suave,

ya que se flexibiliza con la adición de dinero.

Esto permitirá aumentar la inversión en proyectos.

Por otro lado, las regulaciones internas del banco imponen restricciones fuertes.

En primer lugar, la inversión en proyectos con impacto ambiental no puede superar el

30 por ciento del total de la inversión y dado que este banco tiene un enfoque agrario,

la inversión en este sector debe ser,

por lo menos, del 50 por ciento.

Estas restricciones son fuertes,

en el sentido que las inversiones deben

cumplir con los límites impuestos por la normatividad del banco,

deben ser cumplidas sí o sí.

Para empezar, identifiquemos la información con la que contamos,

clasificándola en conjuntos y parámetros.

Tenemos el conjunto de proyectos al que llamaremos P,

el subconjunto de proyectos agropecuarios que llamaremos

PA y el subconjunto de proyectos con alto impacto ambiental que llamaremos PS.

En cuanto a parámetros, tenemos los valores de la utilidad esperada y el

costo de inversión de cada proyecto, el presupuesto inicial,

la participación mínima del portafolio en proyectos agro

y la participación máxima en el portafolio en proyectos con alto impacto ambiental.

En cuanto a las variables de decisión,

el banco debe decidir la fracción

a invertir en cada proyecto x\_i y el presupuesto adicional,

Delta, que planea adquirir asumiendo un costo financiero.

En cuanto a las restricciones,

la inversión total en el portafolio debe ser menor o igual al presupuesto disponible b,

más el presupuesto adicional Delta,

que el modelo debe decidir.

Esto hace que la restricción sea suave,

ya que existe la posibilidad de ampliar el presupuesto inicialmente asignado.

En cuanto a las restricciones regulatorias,

tenemos que la inversión en los proyectos del sector agropecuario debe ser,

por lo menos, una fracción f\_a de la inversión total.

En el ejemplo, esa fracción mínima es del 50 por ciento.

Por otro lado, la inversión en proyectos con alto impacto

ambiental no puede superar una fracción f\_s del total invertido en el portafolio.

En el ejemplo, esa fracción es del 30 por ciento.

Estas restricciones regulatorias las consideramos fuertes,

ya que son de estricto cumplimiento.

Por último, tenemos la naturaleza de variables de decisión.

La fracción a invertir en cada proyecto

tiene una cota inferior a cero y una cota superior en uno.

El valor que tome dentro de este rango corresponde al nivel de inversión en el proyecto.

La variable de presupuesto adicional,

Delta, es mayor o igual a cero.

Finalmente, expresamos la función "objetivo".

El banco busca maximizar los retorno del portafolio,

dados por la suma sobre todos

los proyectos de la utilidad que obtiene en cada uno por su participación.

A esta utilidad le debemos restar el costo financiero del presupuesto adicional, Delta,

que tiene un interés de r. En el ejemplo,

este costo financiero es del 20 por ciento.

Al resolver el modelo,

obtenemos un portafolio diversificado en los tres sectores.

Las restricciones fuertes se cumplen en el límite,

ya que el portafolio tiene una participación del 50 por ciento en

el sector agropecuario y una inversión

en proyectos con alto impacto ambiental del 30 por ciento.

El banco obtiene una utilidad neta,

descontando el interés financiero de 6.012,80.

Para lograr ese resultado,

el banco toma del fondo especial un presupuesto adicional de 1.700.

Si el banco no hubiese podido tomar un presupuesto adicional para inversión,

vemos que las posiciones en el portafolio cambiarían,

viéndose reducidas las inversiones en algunos proyectos como el uno, cuatro y seis.

El portafolio quedaría menos diversificado y se tendría una inversión del

50 por ciento en proyectos agropecuarios y 50 por ciento en proyectos de construcción.

Lo más crítico es que la utilidad neta del portafolio caería

en 1.558 al no hacer uso del presupuesto adicional.

Ahora, vamos a generalizar la estructura de las restricciones suaves,

de forma que sea fácil de recordar y aplicar en diferentes ámbitos. Tenemos tres casos.

En el primer caso, queremos suavizar una restricción de menor o igual.

Para esto, introducimos una variable de desviación,

Delta, que suma al lado derecho de la restricción.

Esto es como si estuviésemos ampliando el límite

que impone la constante b o agregando recursos a esta restricción.

Para que la restricción se desvíe lo menos posible de la original,

a esa variable Delta,

de desviación, la incluimos en la función objetivo,

forzándola a que tome el menor valor posible.

En algunas ocasiones, como la que mostramos en el caso del portafolio inversión,

la variable desviación puede estar acompañada por un costo c.

En el segundo caso,

queremos suavizar una restricción de mayor o igual.

Para esto, introducimos una variable de desviación,

Delta, que resta al lado derecho de la restricción.

Esto es como si estuviésemos reduciendo el valor mínimo que impone la constante b,

haciendo la restricción menos exigente.

Para que la restricción se desvíe lo menos posible de la original,

a esta variable Delta de desviación,

la penalizamos en la función objetivo con un costo c,

forzándola a que tome el menor valor posible.

En muchos casos, este costo basta con que sea de uno.

Finalmente, en el tercer caso queremos suavizar una restricción de igualdad.

Estas restricciones pueden generar infactibilidad en los modelos de optimización,

dado que son muy exigentes al forzar la estricta igualdad.

Puede pasar que las condiciones del problema no las permitan cumplir.

Para esto, adicionamos dos variables de desviación al lado derecho.

La variable Delta menos hace que el lado izquierdo de la

restricción pueda tomar un valor inferior a b y captura esta desviación.

Por el otro lado, la variable Delta más hace lo contrario,

permitiendo que la restricción tome valores

superiores a b. Al igual que los casos anteriores,

para evitar que la restricción se desvíe lo menos de esa aspiración de b,

debemos penalizar estas variables de desviación en la función objetivo.

En este caso, incluimos para cada variable de

desviación sus respectivos costos c menos y c más.

Estos costos diferenciales nos pueden servir para valorar si es

más o menos importante tener desviaciones por arriba o por abajo de la meta b,

impuesta en la restricción.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

En este video vimos cómo,

en muchos contextos, no es obligatorio cumplir de forma estricta las restricciones.

Se permiten ligeras violaciones a las restricciones.

En estos casos, preferimos las restricciones suaves sobre las fuertes,

que son de obligatorio cumplimiento.

Mediante este truco de modelamiento,

tenemos la aspiración de satisfacer la restricción original,

pero si no lo hacemos,

evitamos la infactibilidad suavizando la restricción,

aceptando ligeras desviaciones sobre la restricción original.

Las variables que capturan las desviaciones en

la restricciones suaves deben tener una penalización en la función objetivo.

Por lo general, lo hacemos a través de un costo que puede ser

unitario o que le dé una valoración apropiada a la desviación.

Al flexibilizar el modelo,

tenemos más opciones para escoger y así,

la función objetivo puede ser mejorada.

A través de las restricciones suaves podemos

modelar varios objetivos como metas o aspiraciones en las restricciones.

Esto nos abre la posibilidad

a un enfoque multiobjetivo en la solución

de problemas que se llama: " Programación por metas".

Al interpretar el valor de las desviaciones podemos, de forma proactiva,

sugerir acciones que permiten mejorar

el objetivo o identificar recursos que hacen falta en la organización.

No hay nada más paralizante y contra intuitivo que un modelo infactible.

A través de ese truco de modelamiento,

abrimos un espectro completo para anticiparnos a la infactibilidad.

Esto nos hará mejores modeladores en la práctica.

Semana 5

# Optimización multiobjetivo

[Optimización multiobjetivo | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/0M5bO/optimizacion-multiobjetivo)

Hola. En este video presentaremos algunos

conceptos y métodos relacionados con la optimización multiobjetivo.

En la práctica, definir un único objetivo con los actores involucrados no es tarea fácil.

Por esa razón, es importante prepararnos para resolver problemas

donde se presenten varios objetivos, inclusive en conflicto.

Reproduce el video desde ::36 y sigue la transcripción0:36

Un ejemplo de nuestro día a día,

donde se ilustra la presencia de múltiples objetivos,

es la compra de tiquetes aéreos.

Las aerolíneas nos presentan una cantidad de opciones de

tiquetes que varían dependiendo de los segmentos de mercado que atienden.

Como usuarios, nos interesa que el tiquete que

compremos nos dé beneficios como horarios convenientes,

menor número de escalas,

políticas flexibles de cancelación,

asientos más cómodos y espacio en bodega.

Sin embargo, también nos interesa que el precio del tiquete sea el menor posible.

Entonces, el problema al que nos enfrentamos es:

¿cuál tiquete comprar que ofrezca un buen balance entre beneficios y costos?

Reproduce el video desde :1:28 y sigue la transcripción1:28

Como segundo caso, consideremos ahora un inversionista que desea

colocar una cantidad de dinero en diferentes activos financieros,

como acciones, bonos, fondos mutuos, entre otros.

Esos activos tienen un retorno incierto.

El inversionista pretende encontrar

un portafolio de activos que maximice su rentabilidad en valor esperado,

pero también sabe que los activos rentables pueden tener un riesgo mayor.

Por esa razón, también desea minimizar el riesgo del portafolio.

Para diversificar su portafolio,

el inversionista desea mantener posiciones en múltiples sectores de la economía.

En síntesis, el inversionista desea resolver la

pregunta ¿cómo encontrar un portafolio de activos que,

simultáneamente, maximice el retorno esperado y minimice el riesgo?

Reproduce el video desde :2:22 y sigue la transcripción2:22

Veamos qué implicaciones tiene el considerar múltiples

objetivos en comparación con los problemas de optimización que solo tienen uno.

Reproduce el video desde :2:32 y sigue la transcripción2:32

El problema de optimización con

un solo objetivo lo podemos expresar de la siguiente manera.

Las variables de decisión las agrupamos en un vector

x. Cuando los variables de decisión toman unos valores específicos,

tenemos una solución de nuestro problema.

El espacio que contiene todas las soluciones factibles lo llamamos Omega.

Esta es una forma práctica de definir, de forma general,

un espacio o región de factibilidad que cumple con una gran cantidad de restricciones,

sin entrar a detallarlas.

Finalmente, nuestra función objetivo la representamos a través de la función f,

que permite valorar con una métrica cada solución x.

Así, el problema es minimizar la función objetivo f de x,

sujeto a que el vector x haga parte del espacio de soluciones factibles Omega.

Definiendo el problema de esta forma general,

podemos hablar de cualquier problema sin

entrar en los detalles de un problema particular.

Reproduce el video desde :3:36 y sigue la transcripción3:36

Cuando tenemos un solo objetivo,

el concepto de optimalidad es muy sencillo.

Teniendo nuestro espacio de soluciones,

consideremos dos soluciones x\_1 y x 2.

Para decidir cuál es mejor,

basta con evaluar las soluciones en nuestra función f de x. Tomamos x\_1 y la evaluamos,

y tomamos x\_2 y la evaluamos.

Y concluimos que la solución x\_1 es mejor que x\_2,

dado que su función objetivo es menor.

Reproduce el video desde :4:8 y sigue la transcripción4:08

Por su parte, el problema de optimización multiobjetivo lo expresamos así.

Tenemos el vector de soluciones x que pertenece al espacio solución Omega.

Ahora contamos con k funciones objetivo que optimizamos simultáneamente.

Optimizamos ahora un vector de objetivos,

no solamente una función.

La k-ésima función objetivo la denotamos f\_k de x.

Aunque los términos "objetivo" y "criterio" se usan intercambiablemente,

con mayor precisión los criterios son aspectos

cuantificables con alguna métrica contra los que se evalúan las soluciones disponibles,

mientras que los objetivos pueden denotar ideales más conceptuales,

como maximizar la satisfacción.

En nuestro contexto, los usamos de forma indistinta.

Esas funciones objetivo pueden ser conmensurables,

medidas en las mismas unidades,

o no conmensurables,

medidas en unidades distintas.

Sin embargo, es preferible, en muchas situaciones,

escalarlas o normalizarlas para hacerlas comparables entre sí.

Algunas funciones objetivo deben minimizarse,

mientras otras han de maximizarse,

pero siempre se pueden transformar de un sentido al otro.

Idealmente, de forma análoga a la optimización monoobjetivo,

querríamos encontrar una solución que optimice simultáneamente todos los objetivos.

Por ejemplo, si tenemos cuatro objetivos distintos,

el rojo, amarillo, verde y azul,

denotados como f\_1, f\_2,

f\_3 y f\_4 respectivamente, idealmente,

queremos encontrar una solución x en el espacio de soluciones Omega,

que minimice todas las funciones al mismo tiempo.

Veamos por qué esto es difícil de conseguir en el caso multiobjetivo.

Reproduce el video desde :5:56 y sigue la transcripción5:56

Consideremos un problema con dos objetivos, f\_1 y f\_2,

que queremos minimizar simultáneamente explorando el espacio de solución Omega.

Ahora, cada vector de variables de decisión del espacio de solución tendrá una imagen

en el espacio de los objetivos con su respectiva evaluación con coordenadas f\_1 y f\_2.

Nos gustaría encontrar una única solución x estrella que,

al evaluarla, tenga las siguientes coordenadas en el espacio objetivo.

En cuanto al primer objetivo,

queremos que tenga el menor valor posible, f\_1 estrella.

Y en cuanto el segundo objetivo,

también queremos que tenga el menor valor posible, f\_2 estrella.

Dado que usualmente los objetivos están en conflicto,

es muy difícil que una única solución consiga optimizar cada objetivo por separado.

A esa solución inalcanzable la llamamos "ideal",

dado que representa una utopía.

Reproduce el video desde :6:59 y sigue la transcripción6:59

Cuando existen compromisos entre los objetivos,

es más frecuente tener situaciones como esta.

Consideremos una solución x\_1 con

un vector objetivo dado por la evaluación de f\_1 y f\_2 con la solución x\_1.

De forma similar, ahora,

consideremos una solución x\_2 proyectada en el espacio objetivo.

¿Cuál solución es mejor?

Pues, depende.

Si consideramos el primer objetivo,

x\_1 es una mejor solución que x\_2.

En ese sentido, parece mejor.

Pero si consideramos el segundo objetivo,

ahora es x\_2 quien luce mejor que x\_1.

Un problema de optimización multiobjetivo no

necesariamente tiene una solución que minimiza a todos los objetivos simultáneamente,

sino soluciones que presentan un compromiso entre los objetivos.

Ante la ausencia de una preferencia explícita del decisor por los objetivos,

ninguna solución parece mejor que la otra.

Las dos parecen igualmente buenas.

Formalicemos estos conceptos de optimalidad multiobjetivo.

Reproduce el video desde :8:14 y sigue la transcripción8:14

Consideremos el problema de optimización

multiobjetivo con todas las funciones de minimización.

Si x y y son dos soluciones factibles,

decimos que y domina x si,

para todas las funciones objetivos f\_k,

y tiene un valor menor o igual a x,

y, al menos en una función objetivo,

y obtiene un valor menor estricto que x. Una solución que

no es dominada por otra solución factible se denomina solución de Pareto o no dominada.

Reproduce el video desde :8:47 y sigue la transcripción8:47

Veamos un ejemplo. Consideremos tres soluciones: x\_1,

x\_2 y x\_3, en naranja,

azul y morado, con las coordenadas en el espacio objetivo dadas por la tabla.

Como los objetivos son de minimización,

al comparar las soluciones en el espacio objetivo,

podemos observar que: x\_1 domina a x\_2,

dado que aunque tienen el mismo valor de f\_2,

x\_1 tiene un mejor valor en f\_1.

x\_3 domina estrictamente a x\_2,

dado que tiene valores estrictamente menores en los dos objetivos.

En este caso, hablamos de dominancia estricta.

x\_1 no domina a x\_3.

Notamos que aunque x\_1 tiene un menor valor en f\_1,

x\_2 tiene un menor valor en f\_2.

De forma similar, decimos que x\_3 no domina a x\_1.

En conclusión, en este caso,

diríamos que x\_1 y x\_3 son soluciones de Pareto.

Si nos concentramos en el espacio solución,

decimos que el conjunto de óptimos de Pareto P estrella,

contiene todas las soluciones factibles no dominadas.

Lo definimos formalmente como: el conjunto de todas las soluciones factibles x,

tales que no exista una solución factible y, que la domine.

Ese conjunto de óptimo de Pareto,

lo podemos proyectar al espacio objetivo

para definir la frontera de Pareto, P F estrella.

Miremos un ejemplo. Consideremos las ocho soluciones x\_1 a x\_8 listadas en la tabla.

El vector x\_1 domina los vectores x\_2 y x\_4.

El vector x\_3 domina al vector x\_7 y también al vector x\_4.

Y el vector x\_6 domina también al vector x\_7.

Los vectores: x\_1,

x\_3, x\_6 y x\_8, son no dominados,

forman el conjunto de óptimos de Pareto,

y sus vectores proyectados en el espacio objetivo,

forman la frontera de Pareto.

Reproduce el video desde :11:4 y sigue la transcripción11:04

Afortunadamente, hay una gran

cantidad de métodos para resolver problemas de optimización multiobjetivo.

Reproduce el video desde :11:13 y sigue la transcripción11:13

Los métodos multiobjetivo generalmente consideran un proceso de búsqueda de soluciones,

y un proceso de toma de decisiones.

En los métodos "a priori",

se revelan las preferencias y se toman decisiones antes de buscar.

Esas decisiones "a priori",

enfocan y aceleran la búsqueda.

En los métodos "a posteriori",

se buscan las soluciones no dominadas antes de tomar las decisiones.

Con la frontera revelada,

se pregunta al de decisor sobre sus preferencias.

Finalmente, en los métodos interactivos,

se van revelando soluciones y consultando al decisor para ir guiando la búsqueda.

Reproduce el video desde :11:58 y sigue la transcripción11:58

Un primer método de solución "a priori",

es el método lexicográfico.

Antes de comenzar la búsqueda,

las funciones objetivo se priorizan por orden de importancia para el decisor,

y se considera un objetivo a la vez.

Para empezar, se optimiza el objetivo de máxima prioridad y

se encuentra el mejor valor que llamamos f\_1 estrella.

Luego, optimizamos el segundo objetivo,

sujeto a encontrar una solución que mantenga el objetivo que ya alcanzamos para f\_1.

De esta forma, vamos añadiendo sucesivamente los objetivos de menor prioridad,

incluyendo como restricciones,

los valores de los objetivos de mayor prioridad previamente alcanzados.

Este método "a priori",

tiene como ventaja su simplicidad y eficiencia computacional.

Sin embargo, requiere que el decisor revele

sus preferencias antes de comenzar el proceso de búsqueda.

Es un método que depende,

en gran medida, de la existencia de óptimos alternos.

Reproduce el video desde :13:3 y sigue la transcripción13:03

Quizás, el método "a priori" más intuitivo,

es el de agregar los objetivos a través de una combinación lineal.

En este método, todos los objetivos los agregamos en una suma ponderada,

reduciendo nuestro problema multiobjetivo

en un problema de optimización con un solo objetivo.

Si contamos con objetivos de minimización y maximización,

debemos convertirlos todos en el mismo sentido.

Por ejemplo, si tuviésemos uno de "max",

lo multiplicaríamos por menos 1 para volverlo de minimización.

Los pesos de cada objetivo revelan la importancia relativa dada por el decisor.

Para poder agregar las funciones objetivo,

es conveniente que estas estén escaladas o normalizadas para poder combinarlas.

Este método tiene como ventaja su simplicidad e intuición.

Entre sus desventajas,

está la dificultad de encontrar los pesos de forma anticipada.

Aunque este método genera soluciones no dominadas en la frontera de Pareto,

puede no generar algunas.

Si intentamos generar el frente de Pareto,

a veces puede ser ineficiente,

ya que diferentes pesos pueden generar la misma solución.

Reproduce el video desde :14:20 y sigue la transcripción14:20

Un método "a posteriori",

que puede usarse de forma interactiva,

es el de restricciones Épsilon.

En este método, optimizamos un objetivo,

mientras que los demás los consideramos como restricciones.

Cada objetivo que no se esté optimizando,

lo restringimos con niveles permisibles Épsilon.

De forma sistemática o interactiva,

variamos los valores de Épsilon para conseguir una aproximación de la frontera de Pareto.

Una de las ventajas de este método,

es que si variamos de forma adecuada los valores de Épsilon,

podemos lograr una buena aproximación de la frontera de Pareto.

Al imponer restricciones, es posible descubrir soluciones no dominadas diversas.

El método es sensible a la forma como se varíe los valores de Épsilon.

Reproduce el video desde :15:13 y sigue la transcripción15:13

Otro método "a priori",

muy utilizado es programación por metas.

En este método se requiere que el decisor revele a priori,

unas metas o niveles aceptables para cada objetivo.

Estas metas se consideran restricciones blandas.

Por ejemplo, en el caso de que la meta se desee alcanzar exactamente,

se definen variables de desviación Delta\_k menos,

como las variables por debajo de la meta,

y se definen variables de desviación Delta\_k más,

como variaciones por encima de la meta.

Como estas desviaciones de la meta son indeseables,

la función objetivo minimiza la suma de esas variables de desviación.

Y a través de los pesos,

se pueden priorizar las metas o definir si las

desviaciones por abajo o por encima son más o menos deseables.

Entre las ventajas, podemos resaltar,

que es también posible añadir metas de menor o igual,

o mayor o igual,

y se tratan como restricciones suaves.

El método es computacionalmente eficiente.

Su mayor desventaja es que requiere definir las

metas y asignar pesos a priori, con los decisores.

También es importante normalizar y escalar las metas,

para que las desviaciones se puedan agregar.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

Reproduce el video desde :16:46 y sigue la transcripción16:46

Los problemas multiobjetivo aparecen en muchas situaciones reales.

El concepto de optimalidad,

se asocia a la no dominancia en el espacio objetivo.

Entre más objetivos tengamos,

más soluciones no dominadas tendremos.

Los métodos de solución multiobjetivo,

articulan dos procesos: la búsqueda y la toma de decisiones.

Afortunadamente, existen muchos métodos para resolver esos problemas.

En este video vimos un grupo de métodos que son muy

prácticos y fáciles de utilizar en un contexto aplicado.

Espero que se animen a usarlos.

Semana 5

# Optimización multiobjetivo

[Optimización multiobjetivo | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/0M5bO/optimizacion-multiobjetivo)

Hola. En este video presentaremos algunos

conceptos y métodos relacionados con la optimización multiobjetivo.

En la práctica, definir un único objetivo con los actores involucrados no es tarea fácil.

Por esa razón, es importante prepararnos para resolver problemas

donde se presenten varios objetivos, inclusive en conflicto.

Reproduce el video desde ::36 y sigue la transcripción0:36

Un ejemplo de nuestro día a día,

donde se ilustra la presencia de múltiples objetivos,

es la compra de tiquetes aéreos.

Las aerolíneas nos presentan una cantidad de opciones de

tiquetes que varían dependiendo de los segmentos de mercado que atienden.

Como usuarios, nos interesa que el tiquete que

compremos nos dé beneficios como horarios convenientes,

menor número de escalas,

políticas flexibles de cancelación,

asientos más cómodos y espacio en bodega.

Sin embargo, también nos interesa que el precio del tiquete sea el menor posible.

Entonces, el problema al que nos enfrentamos es:

¿cuál tiquete comprar que ofrezca un buen balance entre beneficios y costos?

Reproduce el video desde :1:28 y sigue la transcripción1:28

Como segundo caso, consideremos ahora un inversionista que desea

colocar una cantidad de dinero en diferentes activos financieros,

como acciones, bonos, fondos mutuos, entre otros.

Esos activos tienen un retorno incierto.

El inversionista pretende encontrar

un portafolio de activos que maximice su rentabilidad en valor esperado,

pero también sabe que los activos rentables pueden tener un riesgo mayor.

Por esa razón, también desea minimizar el riesgo del portafolio.

Para diversificar su portafolio,

el inversionista desea mantener posiciones en múltiples sectores de la economía.

En síntesis, el inversionista desea resolver la

pregunta ¿cómo encontrar un portafolio de activos que,

simultáneamente, maximice el retorno esperado y minimice el riesgo?

Reproduce el video desde :2:22 y sigue la transcripción2:22

Veamos qué implicaciones tiene el considerar múltiples

objetivos en comparación con los problemas de optimización que solo tienen uno.

Reproduce el video desde :2:32 y sigue la transcripción2:32

El problema de optimización con

un solo objetivo lo podemos expresar de la siguiente manera.

Las variables de decisión las agrupamos en un vector

x. Cuando los variables de decisión toman unos valores específicos,

tenemos una solución de nuestro problema.

El espacio que contiene todas las soluciones factibles lo llamamos Omega.

Esta es una forma práctica de definir, de forma general,

un espacio o región de factibilidad que cumple con una gran cantidad de restricciones,

sin entrar a detallarlas.

Finalmente, nuestra función objetivo la representamos a través de la función f,

que permite valorar con una métrica cada solución x.

Así, el problema es minimizar la función objetivo f de x,

sujeto a que el vector x haga parte del espacio de soluciones factibles Omega.

Definiendo el problema de esta forma general,

podemos hablar de cualquier problema sin

entrar en los detalles de un problema particular.

Reproduce el video desde :3:36 y sigue la transcripción3:36

Cuando tenemos un solo objetivo,

el concepto de optimalidad es muy sencillo.

Teniendo nuestro espacio de soluciones,

consideremos dos soluciones x\_1 y x 2.

Para decidir cuál es mejor,

basta con evaluar las soluciones en nuestra función f de x. Tomamos x\_1 y la evaluamos,

y tomamos x\_2 y la evaluamos.

Y concluimos que la solución x\_1 es mejor que x\_2,

dado que su función objetivo es menor.

Reproduce el video desde :4:8 y sigue la transcripción4:08

Por su parte, el problema de optimización multiobjetivo lo expresamos así.

Tenemos el vector de soluciones x que pertenece al espacio solución Omega.

Ahora contamos con k funciones objetivo que optimizamos simultáneamente.

Optimizamos ahora un vector de objetivos,

no solamente una función.

La k-ésima función objetivo la denotamos f\_k de x.

Aunque los términos "objetivo" y "criterio" se usan intercambiablemente,

con mayor precisión los criterios son aspectos

cuantificables con alguna métrica contra los que se evalúan las soluciones disponibles,

mientras que los objetivos pueden denotar ideales más conceptuales,

como maximizar la satisfacción.

En nuestro contexto, los usamos de forma indistinta.

Esas funciones objetivo pueden ser conmensurables,

medidas en las mismas unidades,

o no conmensurables,

medidas en unidades distintas.

Sin embargo, es preferible, en muchas situaciones,

escalarlas o normalizarlas para hacerlas comparables entre sí.

Algunas funciones objetivo deben minimizarse,

mientras otras han de maximizarse,

pero siempre se pueden transformar de un sentido al otro.

Idealmente, de forma análoga a la optimización monoobjetivo,

querríamos encontrar una solución que optimice simultáneamente todos los objetivos.

Por ejemplo, si tenemos cuatro objetivos distintos,

el rojo, amarillo, verde y azul,

denotados como f\_1, f\_2,

f\_3 y f\_4 respectivamente, idealmente,

queremos encontrar una solución x en el espacio de soluciones Omega,

que minimice todas las funciones al mismo tiempo.

Veamos por qué esto es difícil de conseguir en el caso multiobjetivo.

Reproduce el video desde :5:56 y sigue la transcripción5:56

Consideremos un problema con dos objetivos, f\_1 y f\_2,

que queremos minimizar simultáneamente explorando el espacio de solución Omega.

Ahora, cada vector de variables de decisión del espacio de solución tendrá una imagen

en el espacio de los objetivos con su respectiva evaluación con coordenadas f\_1 y f\_2.

Nos gustaría encontrar una única solución x estrella que,

al evaluarla, tenga las siguientes coordenadas en el espacio objetivo.

En cuanto al primer objetivo,

queremos que tenga el menor valor posible, f\_1 estrella.

Y en cuanto el segundo objetivo,

también queremos que tenga el menor valor posible, f\_2 estrella.

Dado que usualmente los objetivos están en conflicto,

es muy difícil que una única solución consiga optimizar cada objetivo por separado.

A esa solución inalcanzable la llamamos "ideal",

dado que representa una utopía.

Reproduce el video desde :6:59 y sigue la transcripción6:59

Cuando existen compromisos entre los objetivos,

es más frecuente tener situaciones como esta.

Consideremos una solución x\_1 con

un vector objetivo dado por la evaluación de f\_1 y f\_2 con la solución x\_1.

De forma similar, ahora,

consideremos una solución x\_2 proyectada en el espacio objetivo.

¿Cuál solución es mejor?

Pues, depende.

Si consideramos el primer objetivo,

x\_1 es una mejor solución que x\_2.

En ese sentido, parece mejor.

Pero si consideramos el segundo objetivo,

ahora es x\_2 quien luce mejor que x\_1.

Un problema de optimización multiobjetivo no

necesariamente tiene una solución que minimiza a todos los objetivos simultáneamente,

sino soluciones que presentan un compromiso entre los objetivos.

Ante la ausencia de una preferencia explícita del decisor por los objetivos,

ninguna solución parece mejor que la otra.

Las dos parecen igualmente buenas.

Formalicemos estos conceptos de optimalidad multiobjetivo.

Reproduce el video desde :8:14 y sigue la transcripción8:14

Consideremos el problema de optimización

multiobjetivo con todas las funciones de minimización.

Si x y y son dos soluciones factibles,

decimos que y domina x si,

para todas las funciones objetivos f\_k,

y tiene un valor menor o igual a x,

y, al menos en una función objetivo,

y obtiene un valor menor estricto que x. Una solución que

no es dominada por otra solución factible se denomina solución de Pareto o no dominada.

Reproduce el video desde :8:47 y sigue la transcripción8:47

Veamos un ejemplo. Consideremos tres soluciones: x\_1,

x\_2 y x\_3, en naranja,

azul y morado, con las coordenadas en el espacio objetivo dadas por la tabla.

Como los objetivos son de minimización,

al comparar las soluciones en el espacio objetivo,

podemos observar que: x\_1 domina a x\_2,

dado que aunque tienen el mismo valor de f\_2,

x\_1 tiene un mejor valor en f\_1.

x\_3 domina estrictamente a x\_2,

dado que tiene valores estrictamente menores en los dos objetivos.

En este caso, hablamos de dominancia estricta.

x\_1 no domina a x\_3.

Notamos que aunque x\_1 tiene un menor valor en f\_1,

x\_2 tiene un menor valor en f\_2.

De forma similar, decimos que x\_3 no domina a x\_1.

En conclusión, en este caso,

diríamos que x\_1 y x\_3 son soluciones de Pareto.

Si nos concentramos en el espacio solución,

decimos que el conjunto de óptimos de Pareto P estrella,

contiene todas las soluciones factibles no dominadas.

Lo definimos formalmente como: el conjunto de todas las soluciones factibles x,

tales que no exista una solución factible y, que la domine.

Ese conjunto de óptimo de Pareto,

lo podemos proyectar al espacio objetivo

para definir la frontera de Pareto, P F estrella.

Miremos un ejemplo. Consideremos las ocho soluciones x\_1 a x\_8 listadas en la tabla.

El vector x\_1 domina los vectores x\_2 y x\_4.

El vector x\_3 domina al vector x\_7 y también al vector x\_4.

Y el vector x\_6 domina también al vector x\_7.

Los vectores: x\_1,

x\_3, x\_6 y x\_8, son no dominados,

forman el conjunto de óptimos de Pareto,

y sus vectores proyectados en el espacio objetivo,

forman la frontera de Pareto.

Reproduce el video desde :11:4 y sigue la transcripción11:04

Afortunadamente, hay una gran

cantidad de métodos para resolver problemas de optimización multiobjetivo.

Reproduce el video desde :11:13 y sigue la transcripción11:13

Los métodos multiobjetivo generalmente consideran un proceso de búsqueda de soluciones,

y un proceso de toma de decisiones.

En los métodos "a priori",

se revelan las preferencias y se toman decisiones antes de buscar.

Esas decisiones "a priori",

enfocan y aceleran la búsqueda.

En los métodos "a posteriori",

se buscan las soluciones no dominadas antes de tomar las decisiones.

Con la frontera revelada,

se pregunta al de decisor sobre sus preferencias.

Finalmente, en los métodos interactivos,

se van revelando soluciones y consultando al decisor para ir guiando la búsqueda.

Reproduce el video desde :11:58 y sigue la transcripción11:58

Un primer método de solución "a priori",

es el método lexicográfico.

Antes de comenzar la búsqueda,

las funciones objetivo se priorizan por orden de importancia para el decisor,

y se considera un objetivo a la vez.

Para empezar, se optimiza el objetivo de máxima prioridad y

se encuentra el mejor valor que llamamos f\_1 estrella.

Luego, optimizamos el segundo objetivo,

sujeto a encontrar una solución que mantenga el objetivo que ya alcanzamos para f\_1.

De esta forma, vamos añadiendo sucesivamente los objetivos de menor prioridad,

incluyendo como restricciones,

los valores de los objetivos de mayor prioridad previamente alcanzados.

Este método "a priori",

tiene como ventaja su simplicidad y eficiencia computacional.

Sin embargo, requiere que el decisor revele

sus preferencias antes de comenzar el proceso de búsqueda.

Es un método que depende,

en gran medida, de la existencia de óptimos alternos.

Reproduce el video desde :13:3 y sigue la transcripción13:03

Quizás, el método "a priori" más intuitivo,

es el de agregar los objetivos a través de una combinación lineal.

En este método, todos los objetivos los agregamos en una suma ponderada,

reduciendo nuestro problema multiobjetivo

en un problema de optimización con un solo objetivo.

Si contamos con objetivos de minimización y maximización,

debemos convertirlos todos en el mismo sentido.

Por ejemplo, si tuviésemos uno de "max",

lo multiplicaríamos por menos 1 para volverlo de minimización.

Los pesos de cada objetivo revelan la importancia relativa dada por el decisor.

Para poder agregar las funciones objetivo,

es conveniente que estas estén escaladas o normalizadas para poder combinarlas.

Este método tiene como ventaja su simplicidad e intuición.

Entre sus desventajas,

está la dificultad de encontrar los pesos de forma anticipada.

Aunque este método genera soluciones no dominadas en la frontera de Pareto,

puede no generar algunas.

Si intentamos generar el frente de Pareto,

a veces puede ser ineficiente,

ya que diferentes pesos pueden generar la misma solución.

Reproduce el video desde :14:20 y sigue la transcripción14:20

Un método "a posteriori",

que puede usarse de forma interactiva,

es el de restricciones Épsilon.

En este método, optimizamos un objetivo,

mientras que los demás los consideramos como restricciones.

Cada objetivo que no se esté optimizando,

lo restringimos con niveles permisibles Épsilon.

De forma sistemática o interactiva,

variamos los valores de Épsilon para conseguir una aproximación de la frontera de Pareto.

Una de las ventajas de este método,

es que si variamos de forma adecuada los valores de Épsilon,

podemos lograr una buena aproximación de la frontera de Pareto.

Al imponer restricciones, es posible descubrir soluciones no dominadas diversas.

El método es sensible a la forma como se varíe los valores de Épsilon.

Reproduce el video desde :15:13 y sigue la transcripción15:13

Otro método "a priori",

muy utilizado es programación por metas.

En este método se requiere que el decisor revele a priori,

unas metas o niveles aceptables para cada objetivo.

Estas metas se consideran restricciones blandas.

Por ejemplo, en el caso de que la meta se desee alcanzar exactamente,

se definen variables de desviación Delta\_k menos,

como las variables por debajo de la meta,

y se definen variables de desviación Delta\_k más,

como variaciones por encima de la meta.

Como estas desviaciones de la meta son indeseables,

la función objetivo minimiza la suma de esas variables de desviación.

Y a través de los pesos,

se pueden priorizar las metas o definir si las

desviaciones por abajo o por encima son más o menos deseables.

Entre las ventajas, podemos resaltar,

que es también posible añadir metas de menor o igual,

o mayor o igual,

y se tratan como restricciones suaves.

El método es computacionalmente eficiente.

Su mayor desventaja es que requiere definir las

metas y asignar pesos a priori, con los decisores.

También es importante normalizar y escalar las metas,

para que las desviaciones se puedan agregar.

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

Reproduce el video desde :16:46 y sigue la transcripción16:46

Los problemas multiobjetivo aparecen en muchas situaciones reales.

El concepto de optimalidad,

se asocia a la no dominancia en el espacio objetivo.

Entre más objetivos tengamos,

más soluciones no dominadas tendremos.

Los métodos de solución multiobjetivo,

articulan dos procesos: la búsqueda y la toma de decisiones.

Afortunadamente, existen muchos métodos para resolver esos problemas.

En este video vimos un grupo de métodos que son muy

prácticos y fáciles de utilizar en un contexto aplicado.

Espero que se animen a usarlos.

SEMANA 6

# Funciones objetivo min-max (max-min)

[Funciones objetivo min-max (max-min) | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/Idded/funciones-objetivo-min-max-max-min)

Hola. Bienvenidos a este vídeo sobre una estructura que

nos ampliará nuestro repertorio para construir modelos de optimización.

Los modelos de optimización usualmente tienen un objetivo,

como minimizar el costo total o maximizar la utilidad global.

Sin embargo, existen situaciones en las que el objetivo se centra en

minimizar el máximo costo que pueda incurrir dentro del horizonte de planeación o,

de forma similar, podríamos estar interesados en maximizar

la mínima utilidad para que no haya un período particularmente malo.

Estas situaciones nos invitan a explorar modelos

con funciones-objetivo del tipo min-max o max-min.

Veamos unos ejemplos.

En este problema, contamos con un diseño

preliminar de un chasis o marco de una motocicleta.

Sin embargo, este diseño preliminar se

puede mejorar a través del ajuste de variables de decisión,

como los ángulos, las distancias entre platinas y los diámetros de los tubos.

A través de un análisis de elementos finitos,

podemos anticipar ante una frenada abrupta

cómo estos esfuerzos se transferirán a todo el marco de la motocicleta.

En algunos puntos del marco se presentarán esfuerzos altos,

donde posiblemente se pueda generar una fractura.

Para mejorar el diseño,

optamos por formular un modelo donde minimizamos el máximo esfuerzo.

Al guiar la optimización con ese objetivo min-max,

es posible lograr que los esfuerzos se distribuyan por todo el marco,

evitando que se concentre en un solo lugar.

Esto generará un diseño del chasis más robusto.

En la generación de energía con fuentes hídricas,

es necesario administrar el agua almacenada en los embalses.

A través de decisiones de almacenamiento,

vertimientos y de la cantidad de agua que pasa por las turbinas,

es posible administrar los embalses mes a mes para que la

producción de energía sea balanceada y no tenga altas variaciones.

Esto lo logramos maximizando la energía mínima producida en el horizonte de planeación.

El efecto neto de hacer máximo el mes donde se

produce menos genera un efecto de balanceo.

Esta situación ilustra el uso de una función-objetivo max-min.

Para ilustrar el uso de estas funciones-objetivo,

utilizaremos un ejemplo en el contexto de una

empresa que distribuye fertilizantes orgánicos.

Una empresa que produce fertilizantes orgánicos tiene presencia en América

Latina y atiende clientes distribuidores ubicados en Colombia,

Ecuador, Bolivia, Brasil y Perú.

Cada uno de estos clientes solicita una cantidad de toneladas de fertilizantes.

Actualmente, la empresa cuenta con

500 toneladas que están listas para ser enviadas a sus clientes.

Por la alta demanda,

no se podrá satisfacer a todos los clientes.

Por tal razón, la empresa ha definido internamente una métrica de

insatisfacción que mide la fracción de demanda insatisfecha, llamada "Alfa".

La fracción de demanda satisfecha es x,

lo enviado, sobre b, lo demandado.

La insatisfacción Alfa es el complemento.

El problema de la empresa es cómo hacer los envíos de

fertilizantes a sus clientes haciendo mínima la insatisfacción global.

Bajo este escenario, formulamos el siguiente modelo de optimización.

Para empezar, identifiquemos la información con la que contamos,

clasificándola en conjuntos y parámetros.

Tenemos un conjunto C de clientes y,

en cuanto a parámetros, tenemos b\_c,

la demanda de fertilizante de cada cliente del conjunto C,

y k, la cantidad de fertilizante disponible en toneladas.

En cuanto a las variables de decisión,

la empresa debe decidir cuántas toneladas de fertilizante enviar a cada cliente.

Estas variables las denominamos x\_c y las indexamos en el conjunto C de clientes.

La empresa no decide directamente el índice de insatisfacción de los clientes, pero,

dado que estos valores dependen de las variables x\_c,

es conveniente crear una variable para estos índices.

Estas variables las denominamos "Alfa\_c",

para todo cliente del conjunto C. En cuanto a las restricciones,

debemos calcular el índice de insatisfacción para cada cliente.

En cuanto al fertilizante disponible,

debemos asegurar que el total de fertilizante que se

envíe a los clientes no supere lo que se tiene disponible.

Finalmente, tenemos las restricciones sobre la naturaleza de las variables,

que garantizan que los envíos e índices tomen valores continuos mayores o iguales a 0.

Finalmente, expresamos la función-objetivo de la empresa.

En este primer escenario,

se desea minimizar la insatisfacción total de los clientes,

es decir, la suma de los índices de cada uno de los clientes.

Al resolver este modelo,

vemos cómo se priorizan los envíos.

Los clientes de Colombia,

Ecuador y Bolivia obtienen lo que demandaron.

Sin embargo, Brasil y Perú no obtienen todo lo que desean,

es decir, quedan insatisfechos.

Para obtener un índice global de insatisfacción mínimo,

el modelo ha decidido priorizar los envíos a los clientes que tienen menor demanda.

En el gráfico "Insatisfacción" se observa que Perú tuvo una insatisfacción de 0,41,

que es la fracción de su demanda no satisfecha,

y dado que no se enviaron unidades a Brasil,

su insatisfacción es exactamente 1.

Esto nos deja con una insatisfacción global de 1,41.

Aunque la solución tiene sentido,

podemos ver que clientes como Brasil y Perú se han

sacrificado drásticamente para reducir la suma total de los índices.

Esta política de distribución puede ser muy inequitativa.

Bajo ese primer escenario,

nuestro modelo tiene como objetivo minimizar la insatisfacción global,

es decir, la suma de las insatisfacciones de cada uno de sus clientes.

Para evitar una solución inequitativa,

podemos formular un objetivo diferente,

que intente minimizar la insatisfacción individual de cada cliente.

Esto lo hacemos a través de una

función-objetivo que haga mínima la máxima insatisfacción.

El hacer que la máxima insatisfacción sea lo menor posible,

tiene como efecto que no se sacrifique drásticamente a un cliente en particular,

sino que la insatisfacción se distribuya entre todos.

En general, esta función min-max es un

truco muy útil para lograr este efecto de balanceo.

Sin embargo, esta nueva función-objetivo no es lineal,

por lo que tenemos que transformarla para que un optimizador lineal la pueda aceptar.

En pocas palabras, debemos transformar este objetivo haciendo uso

de las expresiones lineales en la función-objetivo y las restricciones del modelo.

A esa transformación la llamamos "Linealización".

Afortunadamente, el truco para hacerlo es muy sencillo.

Definimos una nueva variable z,

que guardará el valor de la máxima insatisfacción.

Por lo tanto, z deberá ser superior a cada una de las insatisfacciones de los clientes.

Esto lo logramos expresando que z sea mayor o

igual a Alfa\_c para todo cliente en el conjunto C. Y,

como queremos que esa máxima insatisfacción sea mínima,

la nueva función-objetivo queda simplemente como "minimizar z".

Con esto claro, ahora podemos alterar nuestro modelo para

minimizar la máxima insatisfacción en lugar de la insatisfacción total.

Para este nuevo escenario,

contamos con los mismos conjuntos y parámetros que en el escenario anterior.

Tenemos el conjunto de clientes C,

la demanda b\_c para cada cliente y el total de fertilizante

disponible k. En cuanto a las variables de decisión,

contamos con las variables del escenario anterior,

x\_c para representar los envíos a cada cliente

y Alfa\_c para representar los índices de insatisfacción.

En este nuevo escenario definimos la variable z,

que almacenará la máxima insatisfacción entre todos los clientes.

Adicional a las restricciones del escenario anterior,

debemos añadir las restricciones donde establecemos que la máxima desviación z debe ser

mayor a cada una de las insatisfacciones de los

clientes Alfa\_c y que z es una variable no negativa.

En cuanto a la función-objetivo,

reemplazamos la función-objetivo del escenario anterior

con la función que minimiza la máxima insatisfacción.

Gracias a la linealización que hicimos,

esa función-objetivo es,

sencillamente, minimizar z,

que contiene la máxima insatisfacción.

Ahora, comparemos los resultados entre los dos escenarios.

Para el caso de la minimización total de la insatisfacción,

teníamos la solución donde se sacrificaba drásticamente los clientes de Brasil y Perú.

En contraste, para el caso min-max,

ahora se hacen envíos a todos los clientes.

A simple vista, vemos cómo cada cliente recibe una cantidad proporcional a su demanda.

Ahora, miremos los índices de insatisfacción.

En el primer escenario teníamos dos clientes insatisfechos,

con un total de insatisfacción de 1,41.

En particular, la máxima insatisfacción era del cliente de Brasil, con 1.

En contraste, en el segundo escenario,

las insatisfacciones individuales de cada cliente se equilibran.

A esto nos referimos con "balancear la solución".

La máxima insatisfacción es ahora de 0,47,

pero la insatisfacción total aumenta a 2,37.

En este segundo escenario,

la insatisfacción total empeora en 0,96,

pero la empresa ahora da un trato equitativo a todos sus clientes.

Ese tipo de balance es el que buscamos con el uso de funciones min-max.

En síntesis, podemos ilustrar gráficamente el impacto que tiene la

función-objetivo min-max a partir de

la función de minimización total de la insatisfacción.

Inicialmente, la máxima insatisfacción es la de Brasil con 1.

La función min-max intenta hacer esa máxima desviación lo más pequeña posible,

como si estuviésemos aplanando las barras de insatisfacción.

Al hacerlo, las insatisfacciones de los otros clientes tienden a aumentar y,

finalmente, llegamos a una solución más balanceada.

Ahora veremos una forma rápida de generalizar las

funciones de balanceo min-max y max-min,

que nos permitirán usarlas en varios contextos.

Para el caso de las funciones min-max,

se debe linealizar la función-objetivo,

como vimos en el ejemplo.

Creamos una variable z,

las restricciones de mayor o igual que capturan el máximo y, finalmente,

la función objetivo será minimizar z. El caso de las funciones max-min es similar,

pero con diferencias sutiles.

Ahora, la variable z debe ser menor o igual para capturar el mínimo y, por supuesto,

la función objetivo ahora será maximizar el mínimo que

contiene la variable z. Para terminar,

recapitulemos lo visto en este vídeo.

Estas funciones surgen en aplicaciones donde

la optimización persigue generar soluciones balanceadas.

A veces, los problemas de optimización tienen objetivos que,

aunque globalmente son buenos,

pueden castigar a algunos actores del modelo de forma desproporcionada.

Las funciones min-max y max-min son no lineales,

por lo que debemos aplicar un truco sencillo de linealización.

Al enfocarnos en que al más débil le vaya lo mejor posible,

logramos un efecto de equidad en nuestro modelo.

Sin embargo, eso tiene un compromiso que debemos analizar en cada situación.

SEMANA 7

# Optimización basada en redes

[Optimización basada en redes | Coursera](https://www.coursera.org/learn/optimizacion-para-toma-decisiones/lecture/kOCIQ/optimizacion-basada-en-redes)

Hola. En este video presentamos un tema fascinante de la optimización,

que nos permite formular problemas desde una nueva perspectiva.

Esta poderosa forma de modelar tiene enormes ventajas computacionales.

Veamos por qué es importante comprender estos conceptos de modelamiento en redes.

Para empezar, las redes se presentan en muchos contextos.

Ejemplos de redes son: las mallas viales,

las redes de transporte público,

como las de los metros o sistemas de buses,

las redes sociales que usamos a diario,

las redes de agua que surten a una ciudad,

las redes de energía que interconectan regiones,

las redes neuronales, entre muchas más.

Reproduce el video desde :1:2 y sigue la transcripción1:02

Ilustremos un primer caso de aplicación de planeación de viajes.

A diario, utilizamos aplicaciones que nos permiten planear nuestros viajes,

ya sea cuando los movilizados dentro de la ciudad o en el país.

Dado que la red vial es extensa y tienen muchos atributos, como el tráfico,

la distancia y el tiempo,

existe un gran número de alternativas para escoger las rutas.

Estas aplicaciones necesitan explorar millones de combinaciones en tiempo

real y los servidores donde corren necesitan resolver un alto volumen de consultas.

Esas aplicaciones soportadas en optimización en redes,

resuelven en tiempo real la pregunta,

¿cómo podemos ir desde un origen a un destino de forma eficiente?

Como veremos, a través de la optimización en redes,

podemos resolver esa pregunta como un modelo de ruta más corta.

Reproduce el video desde :2: y sigue la transcripción2:00

Un segundo caso de aplicación,

tiene que ver con la estimación de los tiempos

de evacuación en un contexto de emergencias.

Supongamos que una organización opera en un campus con múltiples edificios,

por ejemplo, una universidad, un conglomerado industrial.

Estos edificios están conectados al interior de sus

espacios a través de escaleras y pasillos;

también los edificios se conectan entre sí a través de puentes y corredores.

En un contexto de salud ocupacional,

es importante anticipar la capacidad de evacuación

de los edificios ante una emergencia causada por un incendio.

De esta forma, a través de la optimización en redes,

podemos resolver la pregunta,

¿en cuánto tiempo será posible evacuar los edificios?

Esta pregunta la podemos responder a través de un

modelo de flujo máximo de optimización en redes.

Reproduce el video desde :2:59 y sigue la transcripción2:59

Finalmente, un tercer caso que exploraremos con mayor detalle,

tiene como contexto una cadena de suministro.

Las cadenas de suministro se componen por varios eslabones.

Los proveedores de insumos surten a las plantas de producción,

estas procesan la materia

prima y generan productos que son transportados a centros de distribución,

que finalmente, los hacen llegar a los consumidores finales.

Las cadenas de suministro deben operar de forma eficiente

para que los clientes tengan los productos que demandan a tiempo.

En este contexto, la optimización en redes puede responder la pregunta,

¿cómo operar eficientemente la cadena de suministro?

Reproduce el video desde :3:45 y sigue la transcripción3:45

Para ilustrar los conceptos de optimización en redes,

nos centraremos en la cadena de suministro.

Consideremos una cadena de suministro de tres niveles con plantas de producción,

distribuidores y tiendas minoristas.

Las plantas se encargan de manufacturar los productos, luego,

las plantas envían el producto terminado a los distribuidores,

y los distribuidores lo transportan a las tiendas minoristas,

quienes venden el producto al consumidor final.

Reproduce el video desde :4:19 y sigue la transcripción4:19

Cada planta tiene una capacidad de producción,

y no hay capacidad de almacenamiento en los distribuidores, es decir,

todo el producto que llega desde las plantas se envía a los minoristas.

Cada tienda minorista demanda un número de unidades.

Debido a las distancias entre plantas y distribuidores,

hay diferentes costos de envío.

De igual manera, los envíos entre distribuidores

y minoristas cuentan con sus propios costos.

Por último, debido a las condiciones de los trayectos y la oferta de los transportadores,

hay un límite en la cantidad de unidades a enviar por estos canales.

El problema de optimización de la cadena de suministro es,

¿cómo satisfacer la demanda de producto de las tiendas minoristas

con la oferta de las plantas productoras al mínimo costo de distribución?

Identifiquemos los componentes del modelo de optimización.

Contamos con la siguiente información en cuanto a conjuntos,

las plantas de distribución,

los distribuidores y las tiendas minoristas.

Reproduce el video desde :5:30 y sigue la transcripción5:30

Los parámetros o datos de entrada de ese modelo son

: la capacidad de producción de las plantas,

la demanda de las tiendas minoristas,

los costos de distribución entre plantas y distribuidores,

y entre distribuidores y minoristas,

y los límites de los canales de distribución entre plantas y distribuidores.

En cuanto a las variables,

debemos decidir cuánto producto enviar desde las plantas a los distribuidores,

y cuánto enviar desde los distribuidores a los minoristas.

Reproduce el video desde :6:7 y sigue la transcripción6:07

En cuanto a las restricciones,

debemos cumplir con las capacidades de producción de las plantas,

satisfacer la demanda de las tiendas minoristas,

garantizar que no se almacene producto en los distribuidores,

no exceder el límite de los canales de distribución entre plantas y distribuidores,

y no fraccionar los envíos de producto.

Es decir, asumiremos que las unidades de producto no se pueden fraccionar.

Reproduce el video desde :6:34 y sigue la transcripción6:34

El objetivo en este contexto es minimizar

los costos de transportar el producto entre plantas, distribuidores y minoristas.

Reproduce el video desde :6:45 y sigue la transcripción6:45

Ahora que hemos identificado los componentes del problema de optimización,

formalizaremos nuestro modelo haciendo uso de una formulación matemática.

Reproduce el video desde :6:56 y sigue la transcripción6:56

Empezaremos con los conjuntos; en este caso,

llamamos P al conjunto de plantas de producción,

D al conjunto de distribuidores y M al conjunto de tiendas minoristas.

Reproduce el video desde :7:11 y sigue la transcripción7:11

En cuanto a los parámetros,

denominamos "s\_p" a la capacidad de la planta "p en P",

"h\_m" a la demanda del minorista "m en M";

"c\_pd super 1",

al costo de enviar una unidad de producto desde la

planta "p en P" al distribuidor "d en D";

"c\_dm super 2",

al costo de enviar una unidad de producto desde

el distribuidor "d en D" al minorista "m en M".

Y, finalmente, "q\_pd",

que es la máxima cantidad de producto que podemos transportar desde

la planta "p en P" al distribuidor "d en D".

Reproduce el video desde :7:59 y sigue la transcripción7:59

Las variables de decisión son: "x\_pd",

la cantidad de producto enviar desde la planta "p en P" al distribuidor "d en D".

Y "y\_dm", la cantidad de producto

a transportar desde el distribuidor "d en D" al minorista "m en M".

Reproduce el video desde :8:20 y sigue la transcripción8:20

Una vez definidas las variables de decisión,

podemos expresar matemáticamente las restricciones.

Para garantizar que se cumpla con la capacidad de las plantas de

producción decimos que para toda planta p en P,

la suma de todos los envíos que hacemos a los distribuidores

d en D no puede exceder la capacidad de la planta s\_p.

Reproduce el video desde :8:45 y sigue la transcripción8:45

Para garantizar que se cumpla con la demanda del producto,

decimos que para toda tienda minorista m en M,

la suma de todos los envíos que nos hacen los distribuidores d en D debe ser,

por lo menos, la demanda h\_m.

Notemos que al ser un problema de minimización de costos,

el optimizados intentará lograr la igualdad,

ya que los envíos adicionales tendrán un costo mayor.

Sin embargo, el incorporar restricciones menos

estrictas es conveniente numéricamente y evita la infactabilidad.

Reproduce el video desde :9:18 y sigue la transcripción9:18

Para los distribuidores, debemos garantizar que el producto no queda almacenado.

Esto es equivalente a decir que para todo distribuidor d en D

lo que entra de producto desde las plantas

debe ser igual a lo que sale hacia los minoristas.

Formalmente, sumamos sobre toda planta p en P los envíos x\_pd,

que hacemos desde las plantas al distribuidor,

y obligamos a que sea igual a la suma sobre todo minorista m en M de los envíos y\_dm,

que hacemos desde el distribuidor a los minoristas.

De esta forma, garantizamos una especie de balance de materia en el distribuidor.

Reproduce el video desde :9:59 y sigue la transcripción9:59

Para satisfacer la capacidad de los canales

de distribución entre plantas y distribuidores,

imponemos una restricción para cada par conformado por

una planta p en P y un distribuidor d en D que

dice que lo que enviamos de producto desde la planta al

distribuidor x\_pd no puede exceder el límite del canal q\_pd.

Reproduce el video desde :10:24 y sigue la transcripción10:24

Finalmente, dado que el producto enviado no se puede fraccionar,

decimos que para todo par conformado por la planta p en P y distribuidor d en D,

la cantidad de producto a enviar por ese canal x\_pd debe ser entera, no negativo.

De forma similar, para toda combinación entre distribuidor d en D y minorista m en M,

la cantidad de producto a enviar y\_dm debe ser entera, no negativo.

Reproduce el video desde :10:56 y sigue la transcripción10:56

En este caso, en la cadena de suministro

se desean minimizar los costos totales de transporte,

que los partimos en dos partes.

La primera son los costos de distribuir

el producto entre las plantas y los distribuidores.

Este costo lo calculamos como la suma de p en P y la suma de d en D del costo unitario de

enviar un producto desde la planta p al

distribuidor d por el número de unidades que enviamos x\_pd.

Esta doble suma, hace que sumemos todas las combinaciones entre planta y distribuidor.

La segunda parte del costo total de transporte,

corresponde a los costos de distribuir el producto entre

los distribuidores y los minoristas.

Este costo lo calculamos de forma similar,

como la suma de d en D y la suma de m en M,

del costo unitario de enviar un producto desde el distribuidor

d al minorista m por el número de unidades que enviamos, y\_dm.

Reproduce el video desde :12:2 y sigue la transcripción12:02

En resumen, hemos formulado el caso de la optimización de la cadena de suministro;

minimizamos el costo total de transporte

sujeto a que la capacidad de las plantas no se exceda,

que todo minorista satisfaga su demanda,

que no se almacene producto en los distribuidores y que se

satisfagan los límites de los canales entre plantas y distribuidores,

al igual que la integralidad de las variables de decisión,

que denotan los envíos entre plantas y

distribuidores y entre distribuidores y minoristas.

Reproduce el video desde :12:36 y sigue la transcripción12:36

La formulación matemática que acabamos de presentar la

podemos resolver haciendo uso del software de optimización.

Sin embargo, ese problema se puede reformular como un problema de redes,

para explotar su estructura y hacer uso de software especializado,

que lo puede resolver más eficientemente.

Veamos cómo hacerlo.

Reproduce el video desde :12:56 y sigue la transcripción12:56

Una red se compone de nodos que forman el conjunto que denominamos

N. Cada nodo tiene asociado un

único parámetro que representa las unidades que se ofertan o demandan.

Este atributo de oferta o demanda lo llamamos b\_i,

y está asociado con todo nodo i en N. Por convención,

si el valor b\_i es positivo,

decimos que el nodo oferta ese número de unidades.

Son comunidades que salen del nodo y alimentan el flujo de la red.

Si el valor es negativo,

el nodo demanda ese número de unidades,

son unidades que se absorben en el nodo.

Finalmente, si el valor es 0,

es un nodo que opera como un transbordo;

todo el flujo que llega también sale.

Reproduce el video desde :13:47 y sigue la transcripción13:47

Las conexiones entre los nodos son los arcos que forman el conjunto A con las tuplas (i,

j), donde i y j son nodos en N. Gráficamente,

lo notamos con las flechas que conectan el nodo cola i

con el nodo cabeza j. Si las flechas tienen dirección,

como en este caso, decimos que el grafo o red es dirigida;

si solo representan la conexión entre i y j,

diríamos que la red es no dirigida.

El primer parámetro asociado con los arcos es el costo que denotamos c\_ij.

Este es el costo unitario por mover una unidad de flujo por el arco (i, j).

El segundo parámetro es la cota inferior l\_ij,

que determina el mínimo flujo que debe pasar por el arco (i, j).

De forma similar, el tercer parámetro es la cota superior,

u\_ij, que determina el máximo flujo que puede pasar por el arco (i, j).

Estos tres atributos de los arcos los podemos agrupar en la tupla (c\_ij, l\_ij, u\_ij).

Reproduce el video desde :15: y sigue la transcripción15:00

Los nodos y arcos forman el grafo que denotamos G.

Los nodos i y j tienen sus parámetros b\_i y b\_j,

que representan el número de unidades que se ofertan o se demandan en los nodos.

Y el arco (i,

j) tiene su tupla de parámetros

conformada por el costo unitario y por las cotas mínimas y máximas de flujo.

El conjunto de nodos y arcos forman el grafo o red,

que es la representación de la realidad que queremos modelar.

Reproduce el video desde :15:35 y sigue la transcripción15:35

Muchos de los algoritmos que aplicamos sobre las redes,

asumen que el grafo debe estar balanceado.

Eso quiere decir que si tomamos todos los nodos de la red,

el total de las unidades que se ofertan,

debe ser igual a las unidades que se demandan.

Formalmente, esta condición de balanceo requiere que la suma

de todas las ofertas y demandas en los nodos de la red debe ser 0.

De no ser 0, tenemos que balancear el grafo antes.

Afortunadamente, es muy fácil de hacer.

Reproduce el video desde :16:10 y sigue la transcripción16:10

Si el grafo está desbalanceado porque su oferta de unidades es mayor,

basta con añadir un nuevo nodo que llamamos "ficticio" y notamos por f;

este nodo demandará el exceso de oferta en la red,

haciendo uso de su parámetro b\_f.

Por el contrario, si el grafo está desbalanceado porque su demanda de unidades es mayor,

creamos un nodo ficticio que oferta las unidades que faltan a través de su parámetro b\_f.

Estos nodos ficticios los conectamos a la red a través

de arcos que nos ayudan a modelar diferentes situaciones.

Lo ilustraremos en nuestro caso de la cadena de suministro.

Retomemos el ejemplo de la cadena de suministro para modelarla como una red.

Reproduce el video desde :17:2 y sigue la transcripción17:02

Los nodos son el conjunto N conformado por las plantas,

distribuidores y minoristas,

que hemos notado P,

D y M. La primera capa de la cadena de suministro está conformada por P;

los nodos que representan las plantas.

La segunda capa está formada por D;

los nodos que representan los distribuidores.

Y, finalmente, la tercera capa está formada por M;

los nodos que representan a los minoristas.

En cuanto al parámetro de oferta/demanda b\_i;

lo diferenciamos por tipo de nodo.

Los nodos que representan las plantas,

ofertan su capacidad de producción s\_i.

Con el signo más,

enfatizamos que estas son las unidades de producto que entran a la red.

Los nodos que representan los distribuidores, no almacenan producto.

Al fijar su parámetro b\_i en 0,

garantizamos que se comporta como un nodo de transporte;

todo lo que le entra de producto también sale.

Finalmente, los nodos que representan los minoristas, demandan h\_i unidades.

Con el signo menos,

enfatizamos que estas son las unidades de producto que

absorben los minoristas y quedan atrapadas en estos nodos.

Reproduce el video desde :18:28 y sigue la transcripción18:28

Por otra parte, el conjunto total de arcos A,

está formado por la unión de dos conjuntos.

El conjunto de arcos que conectan a las plantas con los

distribuidores lo denominamos A super P cruz

D. Los parámetros de sus

arcos son el costo unitario de transporte entre planta y distribuidor,

c super 1\_ij,

la cota inferior de flujo es 0 y su cota

superior es el límite del canal entre planta y distribuidor, q\_ij.

El conjunto de arcos que conectan a los distribuidores

con los minoristas lo denominamos A super D cruz

M. Los parámetros de sus arcos son el costo

unitario de transporte entre distribuidor y minorista c super 2\_ij,

la cota inferior de flujo es 0 y su cota superior no está limitada.

Lo notamos con un más infinito.

Reproduce el video desde :19:28 y sigue la transcripción19:28

El grafo G de la cadena de suministro,

tiene los nodos y arcos que acabamos de definir.

Los nodos i en P que representan las plantas,

empujan flujo a la red a través de su oferta,

dada por la capacidad de producción s\_i.

Los nodos j en D que representan los distribuidores,

reciben las unidades de las plantas y las envían a los minoristas.

Y los nodos k en M que representan los minoristas,

absorben el flujo de unidades que emitieron las plantas a través de su demanda h\_k.

Los arcos (i, j) en A super P cruz D,

representan las conexiones entre plantas y distribuidores,

y sus parámetros tienen el costo unitario entre plantas y distribuidores c super 1\_ij,

un mínimo flujo de 0 y el máximo flujo de q\_ij,

dado por el límite del canal.

Finalmente, los arcos (j,

k) en A super D cruz M,

representan las conexiones entre distribuidores y minoristas,

y sus parámetros tienen el costo unitario entre distribuidores y minoristas,

c super 2\_jk, un mínimo flujo de 0,

y el máximo flujo que no está cotado.

Reproduce el video desde :20:57 y sigue la transcripción20:57

Antes de aplicar un algoritmo de redes,

es necesario balancear la cadena de suministro que acabamos de modelar.

Si tenemos un exceso de oferta en las plantas,

añadimos un nodo ficticio f,

que demanda el exceso de capacidad de producción, b\_i.

También, añadimos a nuestra red un conjunto de arcos ficticios A\_f,

que conectan cada planta i en P con el nodo ficticio f.

A través de estos arcos,

podemos enviar la capacidad que no usemos de las plantas al nodo de demanda ficticio

f. Lo que fluya por estos arcos

es la capacidad ociosa que tendremos en cada una de las plantas.

A estos arcos les ponemos un costo de 0,

un mínimo flujo de 0 y un máximo flujo igual a la demanda del nodo ficticio f.

Aunque poner un costo de 0 en estos arcos puede generar un poco de angustia,

ya que podemos pensar que gran parte de la

capacidad de las plantas se irá por esos arcos,

tengamos en cuenta que la demanda de los nodos de los minoristas también se debe cumplir.

Además, que al ser los valores de estos arcos todos iguales a 0,

la minimización del costo de distribución se logrará por

hacer fluir estratégicamente las unidades por la red,

en los demás arcos,

no por los arcos ficticios.

Si tenemos un exceso de demanda en los minoristas,

añadimos un nodo ficticio f que oferta el déficit de capacidad de producción b\_f.

También, añadimos a nuestra red un conjunto de arcos ficticios

A\_f que conectan el nodo ficticio f a cada minorista k en M.

A través de esos arcos podemos suplir la demanda con

una capacidad extra que no tenemos en las plantas desde el nodo de

oferta ficticio f. Lo que fluya

por estos arcos es la demanda que no podremos satisfacer a los minoristas.

A estos arcos les ponemos un costo de 0,

un mínimo flujo de 0 y un máximo flujo igual a la oferta del nodo ficticio f.

Una vez modelada la red,

podemos estructurar

la optimización de la cadena de suministro como un problema de flujo de costo mínimo.

Al reformular el problema de la cadena de

suministro para que se ajuste a este molde o meta modelo,

podemos hacer uso de algoritmos de optimización en redes especializados para resolverlo.

Pero antes, definamos, en general, este problema.

En el problema de flujo de costo mínimo

tenemos el conjunto de nodos y el conjunto de arcos.

Reproduce el video desde :23:33 y sigue la transcripción23:33

En cuanto a parámetros,

tenemos para los nodos la oferta o demanda b\_i.

Por convención, si b\_i es positivo,

el nodo i en N es un nodo que oferta unidades.

Si b\_i es negativo,

el nodo i demanda unidades y si b\_i es 0,

el nodo es de transbordo.

Como vimos antes, asumimos sin pérdida de generalidad,

que la red se encuentra balanceada,

es decir, que todas las unidades que se ofertan se demandan.

Para los arcos contamos con tres parámetros.

Primero, el costo por hacer fluir una unidad por el arco que llamamos c\_i,

j. Segundo, la cota inferior del arco,

que llamamos l\_b,

j y es el mínimo flujo a enviar por el arco (i, j).

Y tercero, la cota superior del arco,

que llamamos u\_i,

j, y es el máximo flujo a enviar por el arco (i, j) en A.

Reproduce el video desde :24:31 y sigue la transcripción24:31

En este problema debemos decidir cuánto flujo enviar por cada arco de la red.

Para esto, la variable de decisión x\_i,

j se define como la cantidad de flujo que enviamos por el arco (i, j) en A.

Reproduce el video desde :24:46 y sigue la transcripción24:46

Las restricciones clave del problema de

flujo de costo mínimo son las ecuaciones de balance.

Con esas restricciones garantizamos que se cumpla con la oferta y demanda de cada nodo.

Al estar la red balanceada,

las ecuaciones de balance plantean para cada nodo i en

N que las unidades que fluyen por los arcos (i,

j) que salen de i,

menos el flujo de todos los arcos (j,

i) que llegan a i,

debe ser igual a lo que oferta o demanda el nodo b\_i.

Observemos que si lo que sale del nodo i es más de lo que entra,

el nodo opera como un nodo de oferta y su parámetro b\_i debe ser positivo.

Si lo que llega a i es más de lo que sale,

el nodo demanda unidades y su parámetro b\_i debe ser negativo.

Y si lo que llega a i es igual a lo que sale,

el nodo opera como un transbordo y su parámetro b\_i debe ser 0.

Reproduce el video desde :25:43 y sigue la transcripción25:43

El otro grupo de restricciones del problema de flujo de costo mínimo son

las restricciones que acotan el flujo por cada arco.

Para todo arco (i, j) en A,

el flujo debe estar entre l\_i,

j y u\_i, j. Entonces,

lo que fluye por cada arco x\_i,

j debe ser mayor o igual a su cota inferior l\_i,

j y debe ser menor o igual a su cota superior u\_b, j.

De forma compacta, decimos que el flujo por el arco x\_i,

j debe estar entre sus cotas l\_i,

j, y u\_i, j.

Finalmente, si las unidades que fluyen por la red son indivisibles,

debemos imponer que el flujo tome valores enteros.

Para todo arco (i, j) en A,

el flujo x\_i,

j debe ser un entero no negativo.

Sin embargo, por una propiedad matemática del problema de flujo de costo mínimo,

la integralidad se puede obtener gratis al resolver el problema relajado.

Es decir, no tenemos que hacer uso del método de

Branch and Bound para encontrar soluciones enteras.

Como lo dice su nombre,

este problema busca minimizar el costo del flujo por la red.

Para cada arco (i, j),

tomamos el flujo x\_i,

j y lo multiplicamos por su costo unitario c\_i,

j y sumamos sobre todos los arcos de la red.

Reproduce el video desde :27:12 y sigue la transcripción27:12

En resumen, dado un grafo dirigido con nodos,

arcos y sus parámetros b\_i; c\_i,

j; l\_i,

j; y u\_i,

j, el problema de flujo de costo mínimo lo formulamos así.

Minimizamos el costo del flujo por

la red sujeto a cumplir con las ecuaciones de balance en los nodos,

satisfacer las cotas sobre los arcos y de no negatividad sobre los flujos.

Reproduce el video desde :27:42 y sigue la transcripción27:42

Una vez formulado el problema general de flujo de costo mínimo,

veamos cómo la optimización de la cadena de suministro se ajusta a este formato.

Reproduce el video desde :27:54 y sigue la transcripción27:54

Nuestra cadena de suministro la modelamos como un grafo G con su conjunto de nodos N,

formado por las plantas P,

distribuidores D y minoristas M. También tenemos los arcos A con las

conexiones entre plantas y distribuidores y

las conexiones entre distribuidores y minoristas.

Modelado como una red,

nuestro problema se centra en enviar flujo a un costo

mínimo desde las plantas hacia los minoristas,

pasando por los distribuidores.

Las unidades de flujo se generan en las plantas y se absorben en los minoristas.

Se deben cumplir los límites de los canales entre plantas

y distribuidores y se debe garantizar que

no se quede flujo atrapado en los distribuidores,

ya que no tienen capacidad de almacenamiento.

Todo esto lo logramos con la parametrización del grafo y sus parámetros b\_i;

c\_i, j; l\_i,

j; y u\_i,

j. Antes de plantear nuestro problema de flujo de costo mínimo,

debemos garantizar que la red esté balanceada,

es decir, que el flujo ofertado sea igual al demandado.

Si hay desbalance lo corregimos,

sencillamente, añadiendo nodos y arcos ficticios.

El modelo de flujo de costo mínimo planteado sobre una red es

totalmente equivalente al modelo que planteamos en la primera parte de este video.

Veamos cómo las restricciones de balance

garantizan que se cumpla con la capacidad de las plantas,

la oferta de los minoristas y la condición de no

almacenar unidades en los distribuidores.

Como la restricción de balance aplica para todos los nodos,

concentrémonos en un nodo genérico de planta i en la primera capa de la cadena.

La primera suma de la ecuación de balance representa todo

el flujo que sale desde la planta i hacia los distribuidores por los arcos verdes.

La segunda suma de la ecuación de balance representa

todo el flujo que le entra a las plantas,

que en este caso es 0, ya que no hay arcos entrantes.

La ecuación de balance señala que todo

lo que sale menos lo que entra debe ser igual a b\_i,

que, en este caso, es la capacidad de la planta.

Como lo que entra es nulo,

la segunda suma desaparece y queda la expresión que todo lo que sale de la

planta i hacia los distribuidores debe ser igual a la capacidad de la planta s\_i.

Reproduce el video desde :30:21 y sigue la transcripción30:21

Ahora, consideremos la ecuación de balance para un

nodo genérico de distribuidor en la segunda capa de la cadena.

La ecuación de balance quedaría: la primera suma de la ecuación de balance

representa todo el flujo que sale desde el

distribuidor hacia los minoristas por los arcos verdes.

La segunda suma representa todo el flujo que le

entra desde las plantas por los arcos rojos.

Como el nodo distribuidor es de transbordo,

su b\_i, toma el valor de 0.

Pasando la segunda suma al lado derecho,

la ecuación de balance establece claramente que todo el flujo que le llega al nodo

distribuidor i desde las plantas debe ser igual

al flujo que sale desde i hacia los minoristas,

es decir, no hay producto que quede almacenado en los nodos de los distribuidores.

Reproduce el video desde :31:11 y sigue la transcripción31:11

Finalmente, consideremos la ecuación de balance para un

nodo genérico de minorista en la tercera capa de la cadena.

La ecuación de balance quedaría: la primera suma de la ecuación

de balance representa todo el flujo que sale desde el minorista por los arcos verdes.

Como no sale flujo desde el minorista, está a su merced.

La segunda suma representa todo el flujo que

le entra desde los distribuidores por los arcos rojos.

Como el nodo minorista es de demanda,

su b\_i toma el valor de menos h\_i.

Multiplicando por menos 1 a cada lado de la ecuación de balance,

nos queda que lo que le llega al nodo

minorista desde los distribuidores debe ser igual a lo que este demanda

Como vemos, cuando modelamos la cadena de suministro como una red,

las ecuaciones de balance garantizan las condiciones que debe cumplir el problema.

Primero, no exceder la capacidad de las plantas.

Segundo, garantizar que no se almacene producto en los distribuidores.

Y tercero, satisfacer la demanda de los minoristas.

Los problemas de flujo en redes tienen una estructura particular que los hace especiales.

Si el problema de flujo de costo mínimo tiene ofertas,

demandas y cuotas enteras,

entonces su solución es entera.

La matriz de coeficiente de las restricciones es totalmente unimodular;

es decir, toda su matriz cuadrada tiene determinante de menos 1,

más 1, o 0.

Al resolver el problema relajado sin imponer la integralidad,

la solución siempre es entera.

No necesitamos de "branch & bound".

Los algoritmos especializados para flujo en redes,

explotan esas propiedades y son capaces de resolver

problemas de gran escala con muchos nodos y arcos de forma eficiente.

En cuanto a la complejidad computacional,

estos algoritmos especializados requieren de un

número de operaciones como suma de restas y comparaciones,

que están acotados por un polinomio.

En ese sentido, decimos que existen algoritmos eficientes para resolverlos o,

simplemente, que están bien resueltos.

Como vimos al principio de este video,

hay otros problemas de redes,

como el de ruta más corta,

que aparece en el contexto de la planeación de viajes,

o como el de flujo máximo en el contexto de la evacuación de edificios.

Lo interesante es que estos problemas se pueden resolver

como casos especiales del problema de flujo de costo mínimo.

Reproduce el video desde :33:46 y sigue la transcripción33:46

Veamos cómo adaptar el problema de ruta más corta entre un origen y un destino,

al problema de flujo de costo mínimo.

Reproduce el video desde :33:58 y sigue la transcripción33:58

Consideramos un único nodo oferta,

que es el nodo s. Este nodo inicial de donde parte de la ruta,

tendrá una oferta de una unidad de flujo.

Por lo tanto, su parámetro b\_s es igual a 1.

Como la ruta debe llegar a su destino,

consideramos un único nodo demanda que denominamos "e",

su parámetro b\_e será menos 1.

Todos los nodos intermedios son tratados como

nodos de transbordo cuando un b\_i igual a 0.

Es decir, si la ruta pasa por el nodo debe salir de él,

si no pasa por el nodo,

pues no saldrá de él.

Eso garantiza que la unidad que enviamos desde el origen

llega a su destino y no se quede atrapada en un nodo intermedio.

En cuanto a los arcos,

si la ruta pasa por el arco,

incurrirá en un costo de c\_ij por atravesar el arco.

Igualmente, debe fluir por cada arco a lo sumo,

una unidad de flujo, que es la que hemos ofertado en el nodo de origen.

De esta forma, el problema de flujo de costo

mínimo nos sirve para resolver un problema de ruta más corta.

Sin embargo, existen algoritmos

especializados para resolver esos problemas de ruta más corta,

como lo son el Dijkstra o Bellman-Ford, entre muchos otros.

Reproduce el video desde :35:21 y sigue la transcripción35:21

De forma similar, el problema de flujo máximo en una red lo

podemos ver como un caso especial del problema de flujo de costo mínimo. Veamos cómo.

Reproduce el video desde :35:33 y sigue la transcripción35:33

El problema de flujo máximo consiste en enviar la mayor cantidad de flujo desde una

fuente s a un sumidero e. En el caso de la evacuación de los edificios,

queremos enviar la mayor cantidad de personas por la

red para que la evacuación sea exitosa.

Lo que limita el flujo son las capacidades de los arcos,

que en el caso de los edificios,

pueden ser la capacidad de las escaleras o los corredores.

Reproduce el video desde :36:1 y sigue la transcripción36:01

Para transformar el problema de flujo máximo en un problema de flujo de costo mínimo,

habilitamos un arco que conecta el sumidero e a la fuente s,

el propósito de este arco es el de devolver el flujo que llega

a e a la fuente s. Añadimos este arco (e,

s) al conjunto de arcos.

Para maximizar el flujo que llega al sumidero e,

necesitamos que el flujo por este arco sea máximo.

Para incentivar el flujo por el arco,

le ponemos un costo de menos 1.

Como el objetivo del problema de flujo de costo mínimo es de minimizar,

al ponerle un costo de menos 1,

maximizamos el flujo por el arco (e, s).

Como no sabemos cuánto flujo pasará por allí,

no acotamos este arco.

Lo que fluya por este arco será el máximo

flujo que puede pasar por la red desde s hasta e.

Reproduce el video desde :37:2 y sigue la transcripción37:02

Todos los nodos, los consideramos de transbordo y fijamos su b\_i en 0.

Lo central en el problema de flujo máximo son las capacidades de los arcos.

Estas las imponemos en l \_ij y u\_ij para cada arco.

Estas capacidades serán, en últimas,

las que determinarán cuánto es el máximo flujo a enviar por la red.

De esta forma, el problema de flujo de costo mínimo

nos sirve para resolver un problema de flujo máximo.

Al igual que en ruta más corta,

existen algoritmos especializados para resolver estos problemas de flujo máximo,

como el de Ford-Fulkerson" entre otros.

Reproduce el video desde :37:50 y sigue la transcripción37:50

Para terminar, recapitulemos lo visto en este video.

Reproduce el video desde :37:57 y sigue la transcripción37:57

Las redes aparecen naturalmente en muchos contextos.

Muchos problemas pueden ser formulados como redes,

explotando así su estructura.

Al modelar un problema como una red,

podemos usar algoritmos especializados que lo

resuelven eficientemente y permiten escalarlo.

Por su estructura de unimodularidad,

los problemas de flujo en redes poseen la propiedad de

integralidad y no necesitamos hacer uso de "branch & bound".

Es posible transformar varios problemas de redes entre

sí y hacer uso de algoritmos especiales para resolverlos.

El arte de modelar requiere identificar

estructuras como las de redes en nuestros problemas.

El hacerlo nos permitirá adaptar nuestro problema

en uno que se podrá resolver eficientemente.

La optimización en redes es un tema por sí solo,

pero acá hemos cubierto algunos conceptos claves que te permitirán seguir aprendiendo.